

Krzysztof Żuławiński
Instytut Nafty i Gazu, Kraków

Inwersja spektralna oparta na adaptacyjnej metodzie tworzenia rozwinięć sygnałów falkowych

Rozwój inwersji spektralnej wynika z postępu w dziedzinie analizy sygnałów i algorytmów programowania liniowego. Jednym z impulsów do jej zastosowania były zapoczątkowane przez Widessa prace nad rozdzielczością pionową sygnału sejsmicznego z punktu widzenia cienkich warstw i ich wyklinowań [16]. Kolejne prace poświęcone temu zagadnieniu wprowadzały nowe narzędzia matematyczne do analizy problemu, szczególnie dekompozycję spektralną przy użyciu krótkoczasowej transformaty Fouriera STFT (*Short-Time Fourier Transform*), następnie ciągłą analizę falkową CWT (*Continuous Wavelet Transform*). Zastosowanie CWT wynikało z rozwoju teorii falek (*waveletów*), zapoczątkowanej przez prace Gabora [8] i Daubechies [7], a rozwijanej w ramach badań nad przesyłaniem danych, kompresją i odszumianiem sygnałów. W ramach tych prac rozwinięto algorytmy optymalizacji stosowane do aproksymacji lub dekompozycji sygnałów [10]. Wspomniane metody zastosowano w inwersji sejsmicznej, którą w tej wersji nazwano spektralną; decydujące w tym przypadku były prace Puryeara, Castagny, Chopry i Portiniaguine'a [13, 4]. Autorzy rozwinięli metodę opartą na dekompozycji spektralnej, wykorzystującą oscylacje widma wyznaczonego przez STFT, uogólniając model Widessa na dowolne dublety poprzez ich rozkład na część parzystą i nieparzystą. Badali oscylacje widma dla nieparzystej (jak u Widessa) i parzystej składowej dubletu, których zestawienie prowadzi do inwersji, czyli wydzielenia współczynników odbicia zawartych w sygnale sejsmicznym.

Niniejsza praca prezentuje inne podejście, metodę także opartą na rozkładzie dowolnego dubletu na części parzystą i nieparzystą, lecz w miejsce analizy oscylacji widma otrzymanego drogą krótkoczasowej transformaty Fouriera stosuje metodę słownikową, rozwiniętą w ramach prac nad analizą sygnałów, oraz algorytmy adaptacyjne pogoni za dopasowaniem, stosowane w programowaniu liniowym. Metoda Puryeara i Castagny nie zakłada znajomości *waveletu*, a więc kształtu sygnału elementarnego, a podstawową trudnością w jej stosowaniu jest wyznaczenie długości okna STFT. Metoda słownikowa zmusza do założenia, że sygnał elementarny jest dobrze określony. Zakładając, że sekcja sejsmiczna jest zerofazowa albo bliska zerofazowości, a więc sygnał elementarny jest symetryczny, można – stosując filtrację kształtującą widmo sekcji – wymodelować *wavelet* zbliżony do wymagań postawionych w pracy Berkhouta [2], a więc zbliżony do sygnału symetrycznego Rickera, co przy odpowiednim doborze parametrów dopasowania prowadzi do zadowalających wyników.

W literaturze przedmiotu funkcjonuje angielskie określenie „*wavelet*” na oscylującą i zanikającą do zera poza określonym przedziałem zmiennej niezależnej funkcję. Najbliższym odpowiednikiem (właściwie kalką językową) jest polskie słowo „falka”, stosowane są również określenia: falka elementarna, sygnał elementarny, funkcja elementarna, jak również *wavelet* w pisowni angielskiej z polską deklinacją [9]. W niniejszej pracy w miarę możliwości stosowane będzie słowo „falka”.

Podstawy matematyczne

Punktem wyjściowym rozważań jest transformata Gabora [8], czyli przedstawienie sygnału, rozumianego jako

funkcja czasu, w postaci szeregu funkcji elementarnych z odpowiednio dobranymi współczynnikami, czyli:

$$f(t) = \sum_{n,m \in Z} c_{m,n} g_{m,n}(t) \quad (1)$$

gdzie funkcje elementarne $g_{m,n}$ dane są wzorem:

$$g_{m,n}(t) = g(t - na)e^{2\pi imbt} \quad (2)$$

dla stałych parametrów $a, b > 0$, odpowiadających odpowiednio przesunięciu w czasie i skalowaniu częstotliwości. Najczęściej jako funkcję $g(t)$ przyjmuje się funkcję Gaussa, przez co otrzymujemy falę elementarną postaci $g_{m,n}(t) = \pi^{-1/4} \exp(-(t - na)^2/2) \exp(2\pi imbt - n)$, powszechnie stosowaną w ciągłej analizie falkowej (*Continuous Wavelet Transform* – CWT), nazywaną falką Morleta. Analogicznie do dyskretnej transformaty Fouriera w przypadku próbkowanego po czasie sygnału, dla której z N próbek sygnału rzeczywistego otrzymujemy $N/2$ współczynników zespolonych kojarzonych z częstotliwością i fazą, w przypadku transformaty Gabora uzyskamy siatkę $n \times m$ współczynników $c_{m,n}$, gdzie każdej z n pozycji w czasie przypisanych jest m wartości, którym możemy przypisać częstotliwość mb . Odpowiadające danemu na częstotliwości są zlokalizowane (ograniczone przez rozciągłość falki), podczas gdy współczynnik przypisywany wyrazowi transformaty Fouriera odpowiada udziałowi danej częstotliwości w całym przedziale czasu.

Analiza i przetwarzanie sygnałów – rozumianych jako funkcje – oparte są na pojęciu przestrzeni funkcyjnych, w szczególności przestrzeni Hilberta. Transformata Fouriera jest rozkładem sygnału na jego składowe częstotliwościowe, w przypadku sygnału ciągłego w czasie mamy do czynienia z przestrzenią L_2 , sygnał dyskretny rozkładany jest w przestrzeni l_2 . Bazę stanowią odpowiednio ortogonalne funkcje $e^{i\omega t}$ lub szeregi $e^{i\omega n}$. Podobnie dla transformaty Gabora sygnał rozkładamy na składowe, bazę stanowią skalowane i przesuwane w czasie falki Morleta (przyjmuje się z reguły $a = b = 1$). Tak dzieje się w przypadku analizy częstotliwościowej, jednak sygnał można rozłożyć również metodą słownikową. Metoda ta jest zwykle wyjaśniana przy pomocy analogii do języka naturalnego [3, 9], który z właściwą mu nadmiarowością (redundancją) wykorzystuje bliskoznaczne słowa do opisu rzeczywistości, dzięki czemu do jej precyzyjnego opisu wystarcza niewielka liczba słów. Bogactwo słownika pozwala na lakoniczne opisy, ograniczony zasób słów zmusza do dłuższych wypowiedzi przy wymaganej na tym samym poziomie precyzji – brakujące słowa zastępowane są przez bardziej złożone konstrukcje językowe. Zgodnie

z metodą słownikową funkcję można przedstawić w postaci następującej:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n g_{\gamma_n}(t) \quad (3)$$

gdzie c_n jest współczynnikiem rozwinięcia reprezentującym daną przez $g_{\gamma_n}(t)$ cechę sygnału $s(t)$. Funkcje $g_{\gamma_n}(t)$ stanowią elementy słownika zwane atomami, parametr γ stanowi indeks parametryzujący elementy tego słownika – w przypadku wspomnianej falki Morleta jest uporządkowaną trójką $\gamma = (a, b, m)$, $\gamma \in \Gamma$.

W przestrzeni liniowej oznacza to rezygnację z ortogonalności bazy, niezależności liniowej jej wektorów, na rzecz bazy złożonej z wektorów zależnych liniowo, pozwalających w zamian – przynajmniej w teorii – rozłożyć sygnał na możliwie małą liczbę składowych. W metodach spektrometrycznych, na przykład, stosuje się dopasowanie występujących pików przesuniętymi wzdłuż osi odciętych funkcjami Gaussa, ponieważ odpowiadają one oczekiwanym teoretycznym wynikom pomiaru, chociaż nie są liniowo niezależne. Podobnie możemy postąpić z sygnałem sejsmicznym $s(t)$, rozumianym jako splot współczynników odbicia $r(t)$ z falką (*waveletem*) $w(t)$:

$$s(t) = w(t)*r(t) + n(t) \quad (4)$$

w którym $n(t)$ odpowiada szumowi.

Jako że mamy do czynienia z sygnałem próbkowanym w czasie, możemy powyższe równanie wyrazić w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{K/2} & w_{K/2-1} & w_{K/2-2} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ w_{K/2+1} & w_{K/2} & w_{K/2-1} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ w_{K/2+2} & w_{K/2+1} & w_{K/2} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ w_{K/2+3} & w_{K/2+2} & w_{K/2+1} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & w_{K/2} & w_{K/2-1} & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & w_{K/2+1} & w_{K/2} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ r_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ n_N \end{bmatrix} \quad (5)$$

lub w skrócie:

$$S_N = A_{N \times N} R_N + N_N \quad (6)$$

gdzie S_N odpowiada N próbkom sygnału sejsmicznego, R_N – współczynnikiem odbicia, N_N – szumowi, a $A_{N \times N}$ to kwadratowa macierz zbudowana z falek o długości $K < N$ próbek. Realnie dysponujemy S_N i jesteśmy w stanie skonstruować $A_{N \times N}$, znając W_K , a R_N jest poszukiwane. Gdyby odrzucić szum:

$$R_N = A_{N \times N}^{-1} S_N \quad (7)$$

jeśli istnieje macierz odwrotna do $A_{N \times N}$. W rzeczywistości nie możemy przyjąć, że szum nie występuje, nie możemy

również założyć występowania współczynników odbicia wyłącznie na czasie wyznaczonym przez krok próbkowania, stąd trudno oczekiwać, by rozwiązanie według relacji (7) odzwierciedlało uwarstwienie badanego ośrodka.

Teoria inwersji spektralnej

Celem inwersji jest rozwiązanie zadania odwrotnego, czyli wyznaczenie współczynników odbicia na podstawie sygnału sejsmicznego. Współczynniki te odwzorowują uwarstwienie ośrodka manifestujące się zmianami impedancji akustycznej na granicach warstw. Przez sygnał sejsmiczny rozumiemy pojedynczą trasę profilu sejsmicznego lub okno czasowe trasy. Interpretacja sejsmiczna wymaga zwiększenia rozdzielczości pionowej w większości przypadków, szczególnie cienkich warstw oraz ich wyklinowań. Analiza wyklinowań rozpoczęta przez Widessa [16] wychodziła od fizycznego modelu klina odpowiadającego impedancji różnej od otaczającego go ośrodka. Odpowiada mu nieparzysta para współczynników odbicia, których odległość w czasie zależna jest od miąższości warstwy klina mierzonej w dziedzinie czasu. Funkcja współczynników odbicia tego dubletu miała więc następujący wygląd:

$$r_d(t) = r_k \delta(t - t_0) - r_k \delta(t + \Delta t - t_0) \quad (8)$$

gdzie r_k jest współczynnikiem odbicia wynikającym z różnicy między impedancją akustyczną wyklinowanej warstwy i otaczającego go ośrodka, t_0 – czasem górnej granicy klina, Δt – miąższością klina mierzoną w czasie. Rezygnując z ograniczających założeń Widessa i umieszczając punkt analizy dubletu w środku dubletu, otrzymujemy wzór:

$$r_d(t) = r_1 \delta(t - \frac{\Delta t}{2}) + r_2 \delta(t + \frac{\Delta t}{2}) \quad (9)$$

gdzie r_1, r_2 są współczynnikami odbicia odpowiednio od górnej i dolnej granicy warstwy. Na ich wartości nie nakładamy żadnych ograniczeń, z wyjątkiem czysto fizycznych. Z elementarnej matematyki wiadomo, że każdą funkcję można przedstawić jednoznacznie jako sumę składowych parzystej i nieparzystej. Wobec tego:

$$r_d(t) = r_p(t) + r_n(t) \quad (10)$$

gdzie

$$\begin{aligned} r_p(t) &= \frac{r_1 + r_2}{2} \left(\delta(t - \frac{\Delta t}{2}) + \delta(t + \frac{\Delta t}{2}) \right) \\ r_n(t) &= \frac{r_1 - r_2}{2} \left(\delta(t - \frac{\Delta t}{2}) - \delta(t + \frac{\Delta t}{2}) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Dowolny dublet (parę) współczynników odbicia możemy traktować jako złożenie dubletu parzystego i nieparzystego z odpowiednimi współczynnikami. Jeśli teraz potraktujemy falkę W_K jako słowo ze słownika Γ i przypiszemy jej parametr $\gamma = 0$, możemy wzbogacić nasz słownik o kolejne atomy w następujący sposób:

- splatamy parzysty i nieparzysty dublet –

$$r_p(t) = \delta(t - \frac{\Delta t}{2}) + \delta(t + \frac{\Delta t}{2})$$

$$i r_n(t) = \delta(t - \frac{\Delta t}{2}) - \delta(t + \frac{\Delta t}{2}) \text{ z falką } W_K, \text{ uzyskując nowe słowa,}$$

- przypisujemy odpowiednio parametrowi γ wartości $\Delta t, -\Delta t$.

Praktycznie wartości Δt przypisujemy wielokrotność kroku próbkowania trasy.

Kolumny macierzy $A_{N \times N}$ traktujemy jako atomy Γ przesunięte w czasie i uzupełniamy macierz o kolejne kolumny z nowo stworzonymi atomami, splotami dubletów parzystych i nieparzystych z W_K zindeksowanymi odległościami między składowymi dubletu i odpowiednio przesuniętymi w czasie, czemu odpowiada przesunięcie w dół kolumny. Macierz $A_{N \times M}$ zbudowana jest następująco:

- $N - 1$ kolumn z dubletami parzystymi odległymi o jeden krok próbkowania, splecionymi z falką W_K , liczbę kolumn wyznacza pozycja pierwszego i ostatniego składnika dubletu,
- $N - 2$ kolumn z dubletami parzystymi odległymi o dwa kroki próbkowania, splecionymi z falką W_K ,
- ...
- $N - L$ kolumn z dubletami parzystymi odległymi o L kroków próbkowania, splecionymi z falką W_K ,
- $N - 1$ kolumn z dubletami nieparzystymi odległymi o jeden krok próbkowania, splecionymi z falką W_K ,
- ...
- $N - L$ kolumn z dubletami nieparzystymi odległymi o L kroków próbkowania, splecionymi z falką W_K .

Otrzymujemy macierz $A_{N \times M}$, gdzie $M = (2N - L - 1)L$, gdzie atomy o indeksie 0 zostały usunięte, z dwóch powodów:

- falka spleciona z pojedynczym współczynnikiem odbicia odpowiada sumie dubletów parzystego i nieparzy-

stego – pozostawienie tych atomów czyniłoby kolumny macierzy $A_{N \times N}$ liniowo zależnymi z dokładnością do błędów obciążenia,

- atomy o indeksie 0 nie występowały w rozwiązaniach, zastosowany algorytm czynił je zbędnymi w wykonanych testach.

Równanie (6) ma teraz następującą postać:

$$S_N = A_{N \times M} C_M \quad (12)$$

gdzie S_N pozostaje bez zmian, $A_{N \times M}$ została opisana powyżej, C_M odpowiada współczynnikom rozwinięcia ze wzoru (3).

Algorytm pogoni za dopasowaniem

Rozwiązanie równania (12) jest zagadnieniem z dziedziny optymalizacji. Przy pomocy adaptacyjnej metody rozwinięć sygnałów wyznaczamy liniowe rozwinięcie sygnału $s(t)$ atomami ze słownika Γ . Celem jest najwierniejsze przedstawienie sygnału przy użyciu jak najmniejszej liczby atomów. W naszym przypadku mamy sygnał o długości N oraz słownik M atomów o takiej samej długości, gdzie $N \ll M$. Chodzi o rozwiązanie równania (12) przy użyciu minimalnej liczby współczynników c_i , czyli zminimalizowanej normy zerowej C (zliczającej współczynniki występujące w rozwinięciu), zachowujące wierne odtworzenie sygnału. Wyrażając to w kategoriach słownikowych, naszym celem jest możliwie precyzyjne wyrażenie treści przy pomocy możliwie małej liczby słów. Gdybyśmy zastosowali rozwiązanie klasyczne tego typu zagadnienia, jak w przypadku regresji liniowej, minimalizowalibyśmy funkcję $f(c)$, taką że:

$$f(c) = \sum_{n=1}^N \left(s_n - \sum_{m=1}^M a_{n,m} c_m \right)^2 \quad (14)$$

W naszym przypadku dodatkowo oczekujemy zminimalizowania zastosowanej liczby atomów słownika w rozwiązaniu. Możliwe są trzy rozwiązania w zależności

Załóżmy, że dysponujemy rozwiązaniem powyższego równania. Macierzy $A_{N \times M}$ odpowiada macierz $R_{N \times M}$, której kolumny zamiast spłotów współczynników odbicia z falką zawierają dublety współczynników odbicia, z których te spłoty otrzymano. Ze wzoru

$$In_N = R_{N \times M} C_M \quad (13)$$

gdzie In_N jest wynikiem inwersji spektralnej, otrzymujemy wektor zawierający współczynniki odbicia uwarstwionego ośrodka, źródło sygnału sejsmicznego (trasy) S_N . Przeprowadzając tę procedurę dla całego profilu sejsmicznego lub jego wybranego fragmentu, dokonujemy inwersji spektralnej.

od stosowanej normy. Dla normy L_0 (normy Hamminga) minimalizujemy:

$$f(c) = \sum_{n=1}^N \left(s_n - \sum_{m=1}^M a_{n,m} c_m \right)^2 + \lambda \|C\|_0 \quad (15)$$

Dla norm L_1 i L_2 otrzymujemy wzory:

$$f(c) = \sum_{n=1}^N \left(s_n - \sum_{m=1}^M a_{n,m} c_m \right)^2 + \lambda \sum_{m=1}^M |c_m| \quad (16)$$

oraz

$$f(c) = \sum_{n=1}^N \left(s_n - \sum_{m=1}^M a_{n,m} c_m \right)^2 + \lambda \sum_{m=1}^M c_m^2 \quad (17)$$

gdzie λ jest arbitralnie przypisaną wagą, odpowiadającą znaczeniu, jakie przypisujemy udziałowi licznosci słownika w optymalizacji rozwiązania. Algorytmy adaptacyjnej optymalizacji zgodne z powyższymi równaniami istnieją i są dostępne w programie MatLAB[®] firmy MathWorks[®]. W literaturze polskiej określa się je wspólnym mianem algorytmu pogoni za dopasowaniem. W literaturze światowej (angielskiej) stosuje się dwa określenia: *matching pursuit* w przypadku normy L_0 i *basis pursuit* dla L_1 .

Eksperty numeryczne

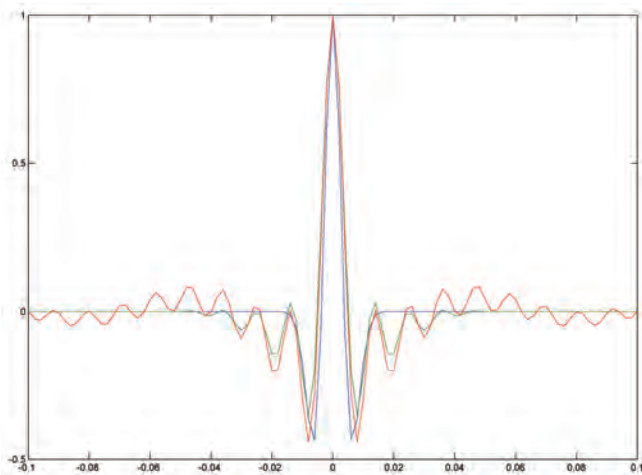
Obliczenia wykonano w systemie MatLAB[®] firmy MathWorks[®] wersja 2009b. Analizę możliwości inwersji spektralnej prowadzono w następujący sposób:

1. Wygenerowano zestaw współczynników odbicia – 200 elementowy wektor Rz_N , $N = 200$, wypełniono szumem białym, stosując generator liczb losowych o rozkładzie normalnym, około 3/4 jego składowych zostało wyzerowane; pozycję zerowanego elementu otrzymano z generatora liczb losowych o rozkładzie

równomiernym. W przedstawionych poniżej przykładach dla porównania stosuje się jedną wspólną trasę współczynników odbicia. Jako krok próbkowania przyjęto 2 ms.

2. Przyjmując L jako parametr, utworzono macierz $R_{N \times M}$ w sposób opisany powyżej.
3. Wygenerowano odpowiednią falkę – stosowano następujące (rysunek 1) [14]:
 - a. Rickera: $w_R(t, f = 60)$,

- b. Ormsby’ego: $w_o(t, f_1 = 0, f_2 = 20, f_3 = 80, f_4 = 100)$, gdzie f_1, f_2, f_3, f_4 są częstotliwościami określającymi pasmo przenoszenia,
 - c. Klaudera: $w_k(t, f_1 = 15, f_2 = 90, T = 16)$, gdzie f_1, f_2 to odpowiednio dolna i górna granica częstotliwość *sweepu*, T – czas jego trwania.
4. Dokonano spłotu Rz_N oraz kolumn $R_{N \times M}$ z wybranym *waveletem*, uzyskując odpowiednio S_N oraz $A_{N \times M}$, do S_N opcjonalnie dodano szum o wybranych parametrach.
 5. Przeprowadzono proces optymalizacji, minimalizując funkcję ze wzoru (16), stosując algorytm pogoni za dopasowaniem (*basis pursuit*), parametryzując λ .
 6. Otrzymany wektor współczynników rozwinięcia C_M zastosowano zgodnie ze wzorem (13), otrzymując wektor In_N , który jako wynik inwersji S_N porównano z Rz_N . Powinny być podobne lub tożsame.



Rys. 1. Stosowane w pokazanych testach falki, kolor niebieski – Ricker 60 Hz $w_r(t, 60)$, zielony – Ormsby $w_o(t, 0, 20, 80, 100)$, czerwony – Klauder $w_k(t, 15, 90, 16)$

Testowano następujące parametry: L (punkt 2 powyższej listy), falki (punkt 3), szum N_N (punkt 4) oraz λ (punkt 5).

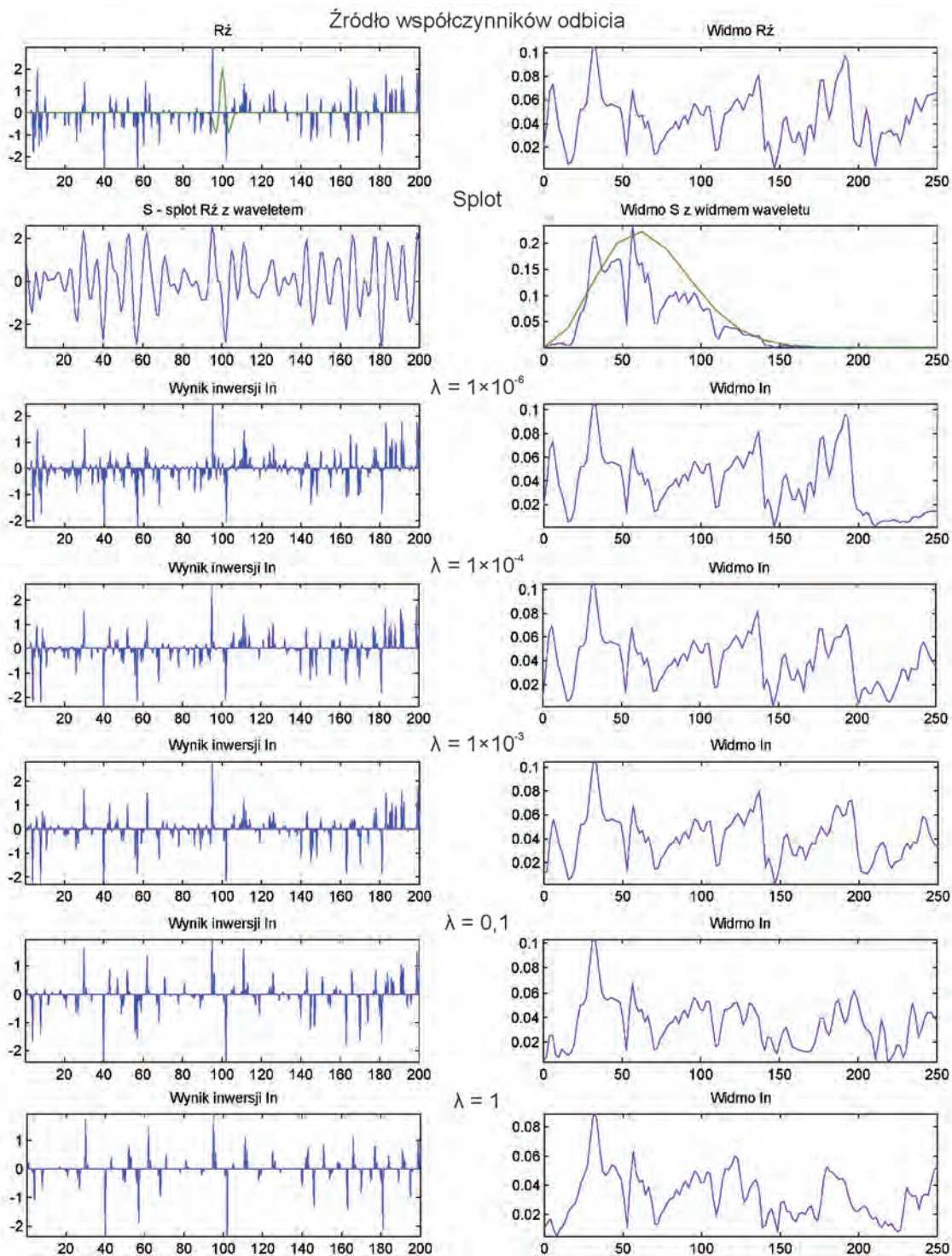
Wyniki przedstawiono na rysunkach. Rysunek 2 przedstawia wyniki dla przypadku $L = 15$ oraz λ od 1×10^{-6} do 1. Dla $\lambda = 1 \times 10^{-6}$ jest to praktycznie rozwiązanie zgodne ze wzorem (14), czyli przybliżenie średniokwadratowe. Widmo Rz_N przedstawione na wykresie w pierwszym wierszu i drugiej kolumnie silnie oscyluje (pomimo zastosowania funkcji wagującej Parzena), co wynika z charakteru sygnału (szum biały) oraz z obciążenia i rozbieżności estymatora DFFT. Zrezygnowano z wygładzania widma, ponieważ oscylacje te przenoszą się na poniższe wykresy widma, ułatwiając śledzenie zmian. Na wykresie widma spłotu pokazano nałożone widmo *waveletu* z widocznym efektem mnożenia widm splatanych sygnałów. Niżej położone

wykresy (od wiersza 3, kolumna 2) uwidaczniają tak pożądaną efekt rozszerzenia widma, do którego prowadzi, a przynajmniej powinna, inwersja. Badano również błąd obliczony jako różnica $In_N - Rz_N$ oraz rozkład wartości współczynników rozwinięcia C_M , na pokazanie których brak tutaj miejsca. Zmiana wartości λ istotnie wpływa na rozwiązanie i rozkład współczynników atomów występujących w rozwiązaniu; w miarę powiększania parametru λ algorytm usuwa współczynniki mniej znaczące zarówno z C_M , jak i w konsekwencji z In_N .

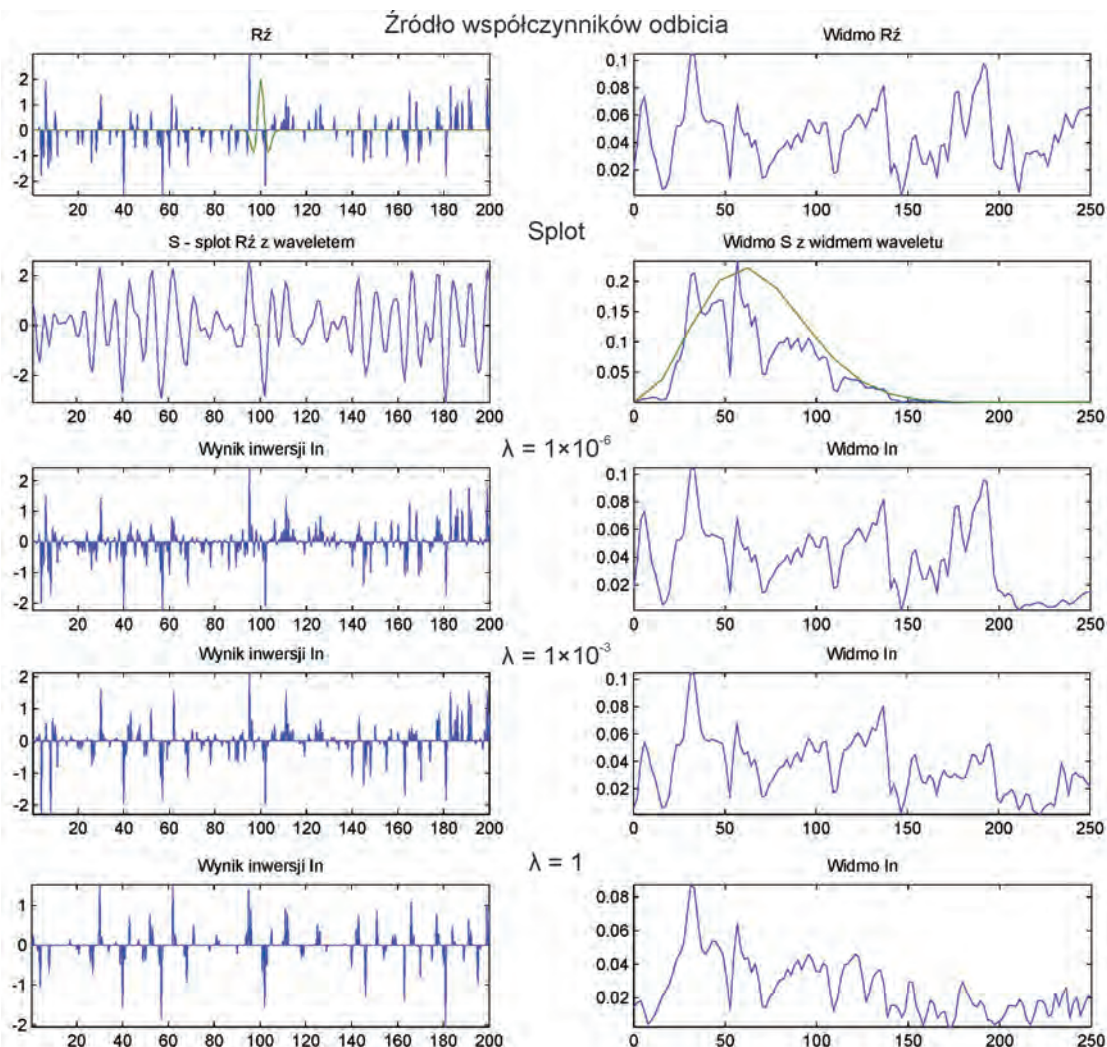
Kolejny rysunek pokazuje wpływ parametru L . Pomiędzy wyniki dla $L = 10$, jako że nie różnią się od wyników dla $L = 15$. Nawet zmniejszenie parametru L do pięciu kroków próbkowania (rysunek 3), co odpowiada rozsuwaniu dubletu do 10 ms, nie prowadzi do krytycznego pogorszenia rezultatów.

Wpływ szumu na wyniki inwersji (rysunki 4 i 5) zbadano, wprowadzając szum kolorowy otrzymany przez filtrację szumu białego filtrem dolnoprzepustowym z częstotliwością odcięcia równą dwóm trzecim całego zakresu częstotliwości, tj. około 166 Hz. Ta granica jest jednocześnie górną granicą widma zastosowanych falek, przyjęto bowiem, że w warunkach realnych szum zostanie odfiltrowany powyżej częstotliwości użytecznego sygnału. Dziesięcioprocentowy poziom szumu jest więc realnie większy – biorąc pod uwagę zakres jego występowania, można przyjąć, że odpowiada 15-proc. szumu białego w całym zakresie częstotliwości. Z licznie przeprowadzonych prób wynika, że jest to górna granica zaszumienia sygnału dla badanej metody. Powyżej tej wielkości inwersja praktycznie nie jest możliwa. Zastosowano w tym przypadku parametr λ równy 1 i 0,1, ponieważ redukcja liczby atomów występujących w rozwiązaniu odpowiada odsumianiu. Ze stosowanych tu algorytmów rutynowo korzysta się w kompresji i odsumianiu (*denoising*), stąd metoda dość dobrze sobie radzi w tej sytuacji.

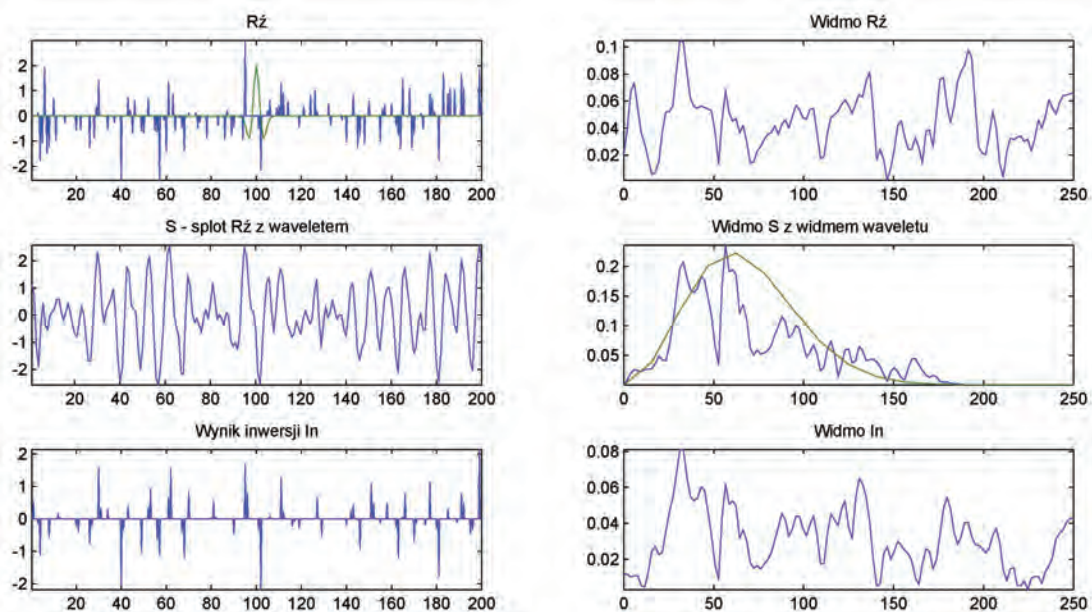
Dla porównania wykonano również inwersję dla falek Klaudera (rysunek 7) i Ormsby’ego (rysunek 6), zdefiniowanych i przedstawionych powyżej (rysunek 1). W pracach poświęconych dekompozycji spektralnej oraz inwersji spektralnej stosuje się na ogół falki Rickera lub wygaszane sinusoidy [16], także Berkhout [2], dyskutując problem rozdzielczości pionowej, preferuje falki o relatywnie szerokim maksimum i pojedynczych bocznych minimach ze zredukowanymi oscylacjami bocznymi. Obydwa wymienione tu *wavelety* tych kryteriów nie spełniają – zastosowano je ze względu na powszechne występowanie w praktyce – ale wykonane na nich testy dają poprawne wyniki inwersji.



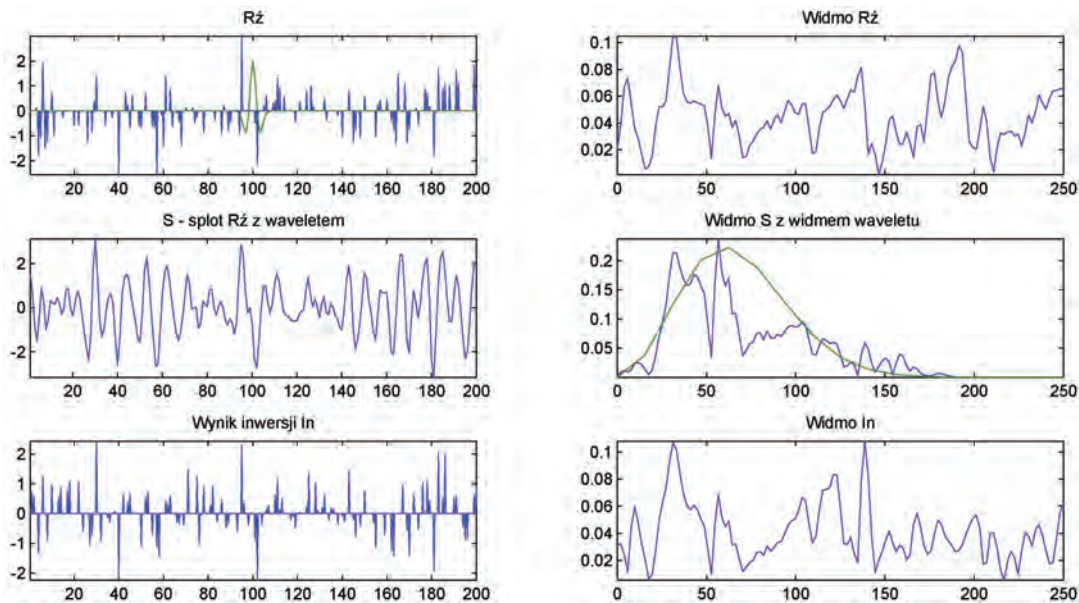
Rys. 2. Wyniki testu dla parametrów: $L = 15$, wavelet Rickera 60 Hz, szum 0% oraz różnych wartości parametru λ (opis w tekście)



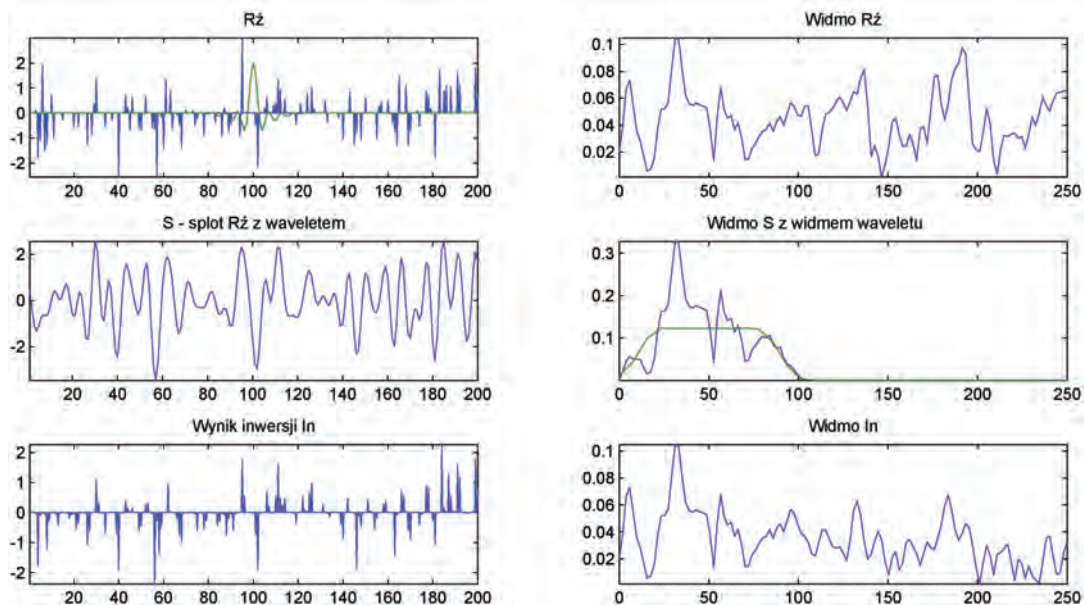
Rys. 3. Wyniki testu dla parametrów: $L = 5$, *wavelet* Rickera 60 Hz, szum 0% oraz różnych wartości parametru λ (opis w tekście)



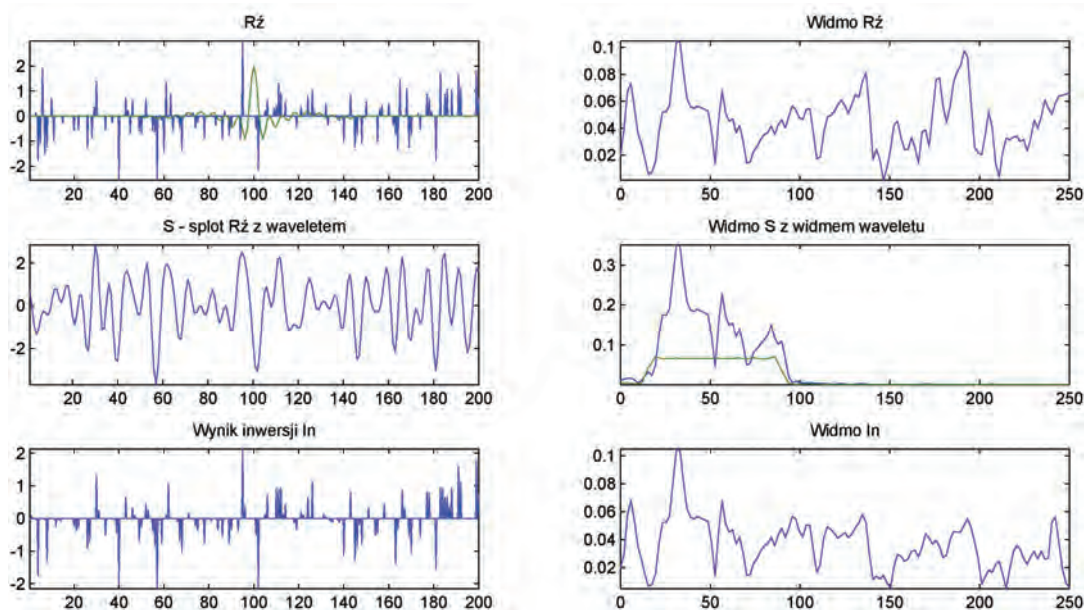
Rys. 4. Wyniki testu dla parametrów: $L = 10$, *wavelet* Rickera 60 Hz, szum 10% oraz $\lambda = 1$



Rys. 5. Wyniki testu dla parametrów: $L = 10$, *wavelet* Rickera 60 Hz, szum 10% oraz $\lambda = 0,1$



Rys. 6. Wyniki testu dla parametrów: $L = 10$, *wavelet* Ormsby'ego 60 Hz, szum 0% oraz $\lambda = 1 \times 10^{-3}$



Rys. 7. Wyniki testu dla parametrów: $L = 10$, *wavelet* Klaudera 60 Hz, szum 0% oraz $\lambda = 1 \times 10^{-3}$

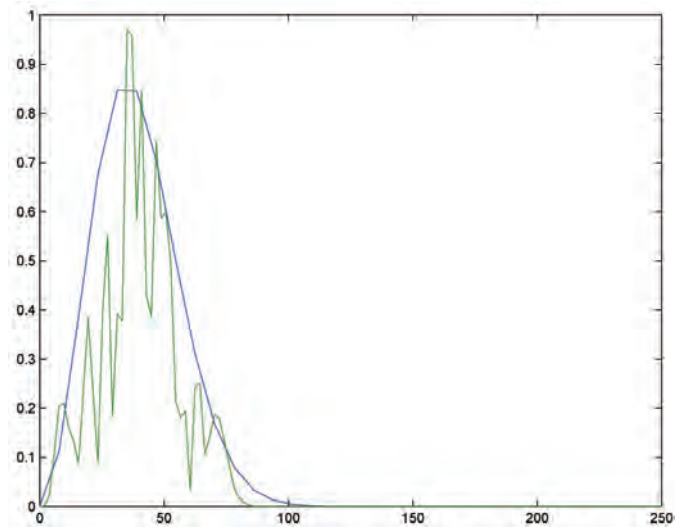
Obliczenia na profilu sejsmicznym

Test opracowanej metody i jej implementacji przeprowadzono na danych rzeczywistych, tj. na sekcji sumowanej. Wybrany fragment sekcji zawiera 200 tras o kroku próbkowania 2 ms, w oknie od 0 s do 1,7 s.

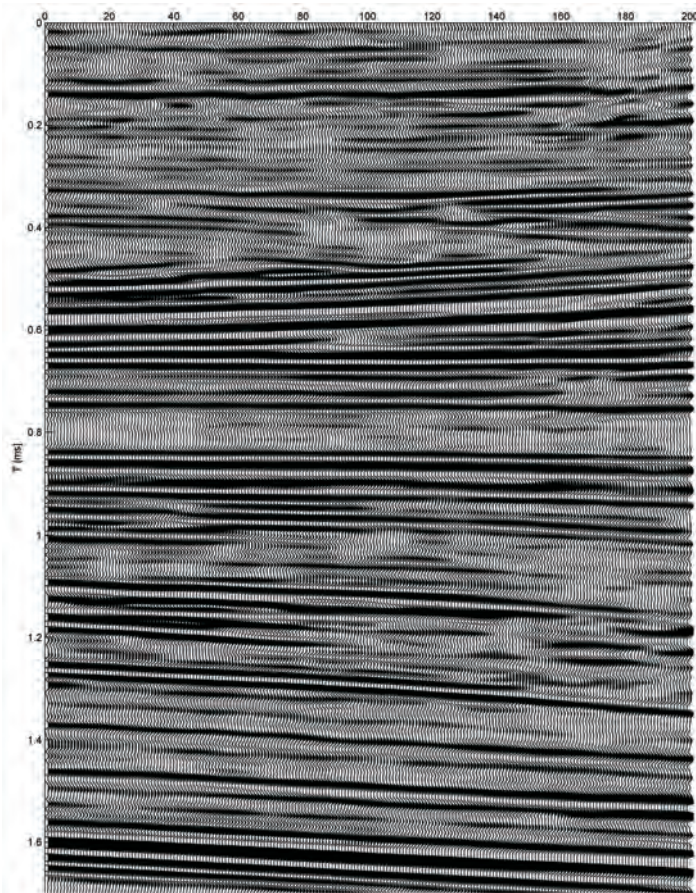
Wykonano analizę widma wybranego fragmentu i na jej podstawie wybrano *wavelet* Rickera 35 Hz oraz przeprowadzono szereg testów, dobierając parametry. Obliczenia wykonano stosując następujące parametry:

- zerofazowy *wavelet* Rickera 35 Hz;
- $L = 10$, nie stwierdzono różnicy w stosunku do pierwotnie testowanej wartości 15;
- $\lambda = 0,1$;
- $N = 851$, obliczenia przeprowadzono w całym przedziale wybranego okna.

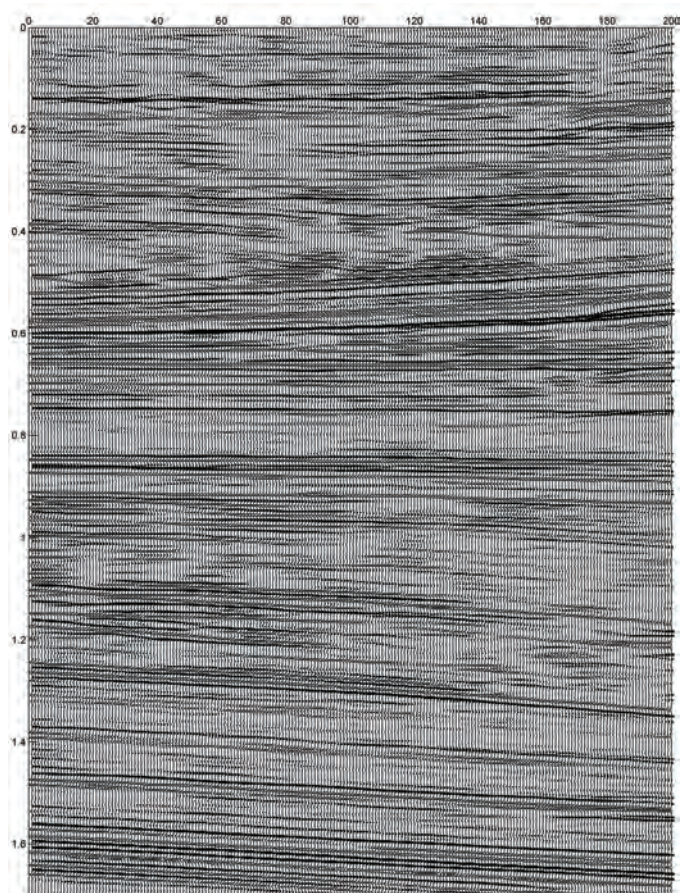
Wyniki inwersji przedstawiono na rysunkach 9–12. Analiza otrzymanych rezultatów pozwala stwierdzić, że metoda może być z powodzeniem stosowana w pracach badawczych i zastosowaniach przemysłowych.



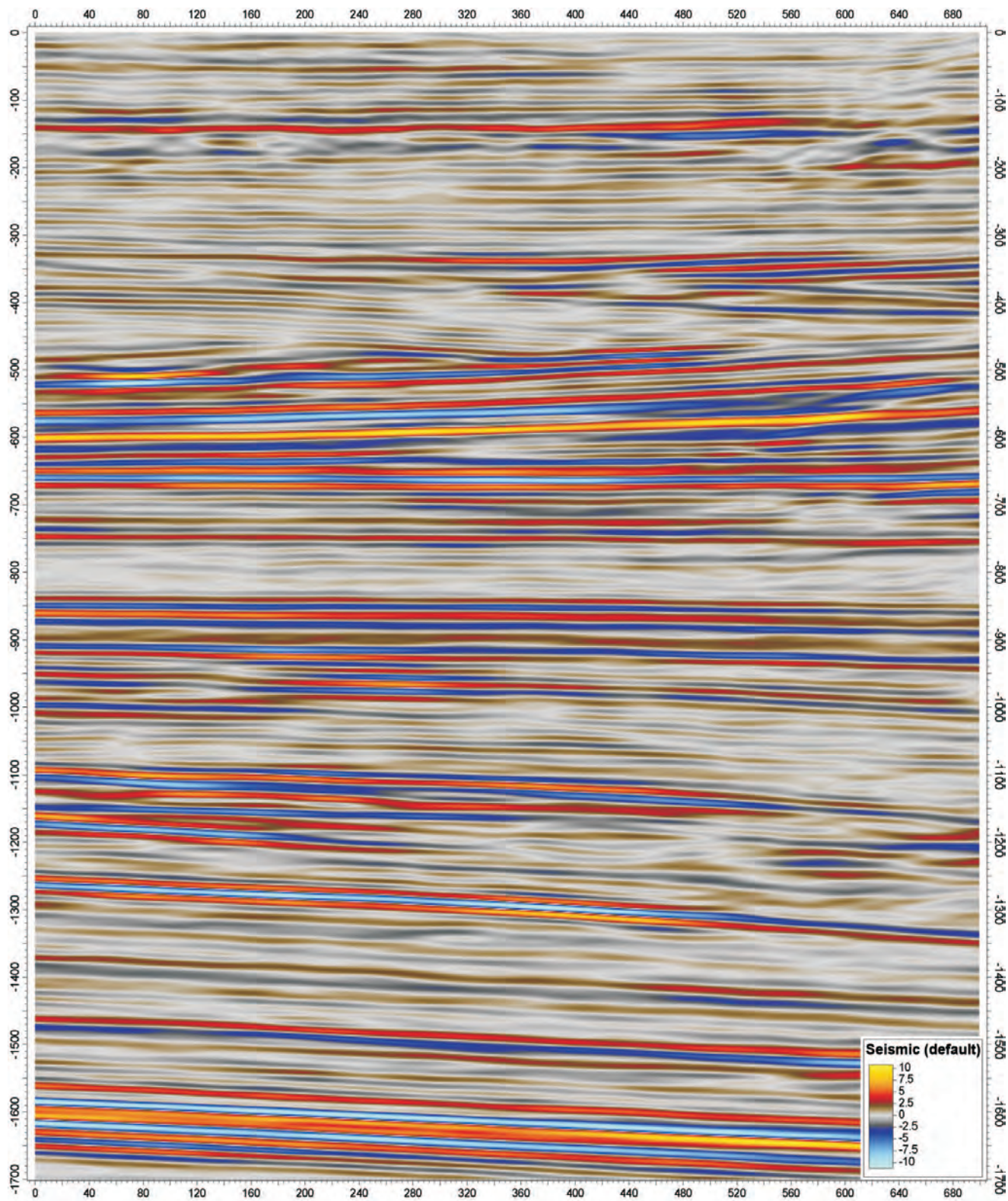
Rys. 8. Widmo wybranego fragmentu profilu (kolor zielony) zestawione z wybranym *waveletem* Rickera 35 Hz, oś odciętych – częstotliwość



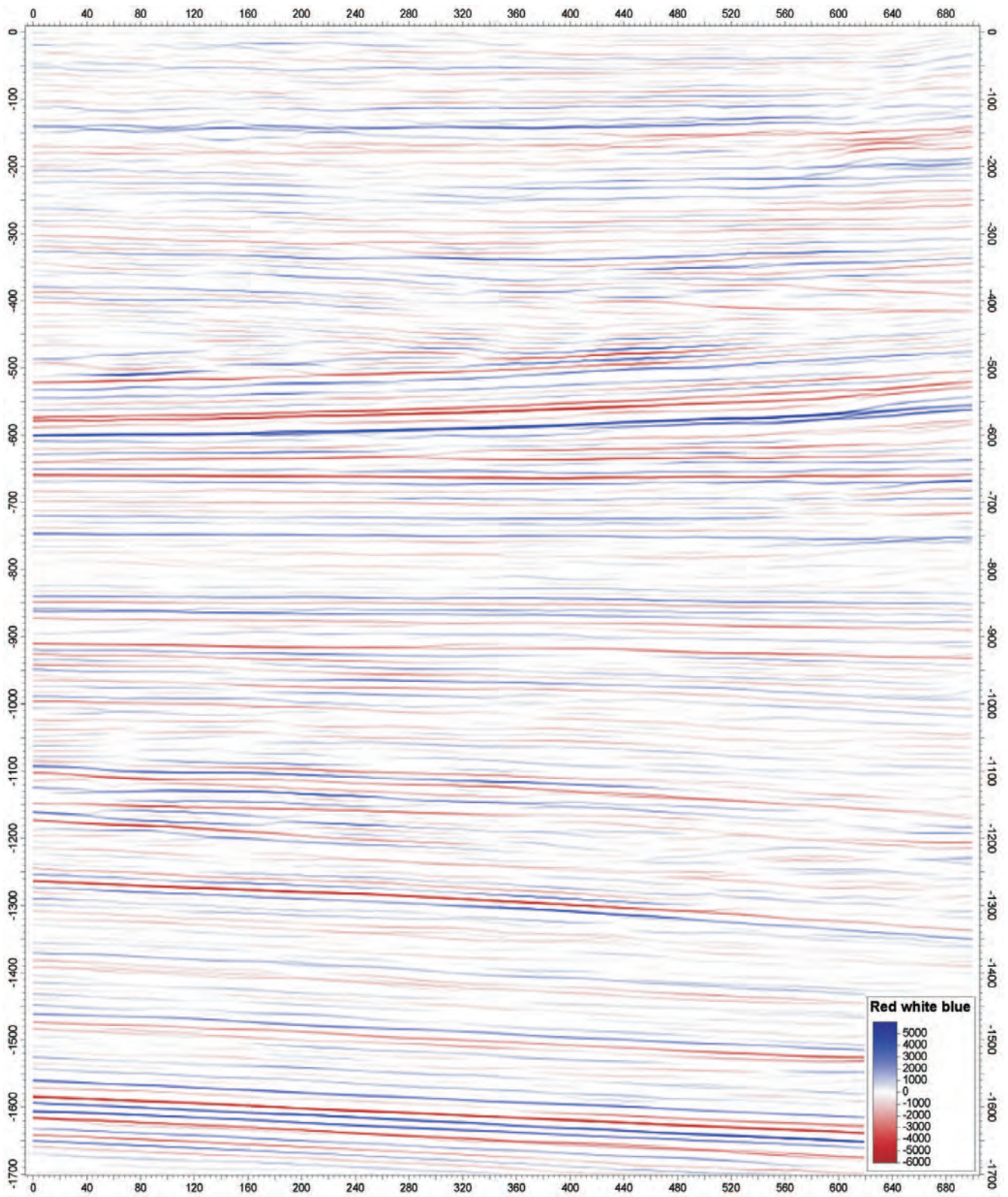
Rys. 9. Dane rzeczywiste – fragment profilu sejsmicznego



Rys. 10. Wyniki inwersji spektralnej wykonanej opisaną metodą (parametry podane w tekście)



Rys. 11. Dane rzeczywiste – fragment profilu sejsmicznego przedstawiony w standardowych kolorach



Rys. 12. Wyniki inwersji spektralnej wykonanej opisaną metodą, przedstawione w zwyczajowych barwach

Podsumowanie

Inwersja spektralna w wersji opartej na analizie fal-kowej, metodzie słownikowej oraz adaptacyjnym dopasowaniu wydaje się bardzo silnym narzędziem interpretacyjnym sygnału sejsmicznego. Następuje rozszerzenie widma trasy sejsmicznej – z przeprowadzonych testów wynika, że możliwe jest pełne odtworzenie widma – oparte na prostym w istocie założeniu o możliwości

rozkładu współczynników odbicia na dipole i dalej na ich parzyste i nieparzyste składowe. Stwierdzona duża odporność na szum oraz prostota połączone z ogólną dostępnością algorytmów skłaniają do zastosowania metody w praktyce. Przegląd wyników przekonuje, iż stanowi ona silne wsparcie – oparte na obiektywnych przesłankach – dla interpretatora.

Literatura

- [1] Akansu A. N., Haddad R. A.: *Multiresolution Signal Decomposition: Transforms, Subbands and Wavelets*. Academic Press, 2001.
- [2] Berkhout A. J.: *Seismic Resolution*. Geophysical Press, 1984.
- [3] Białasiewicz J. T.: *Falki i aproksymacje*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2000.
- [4] Chopra S., Castagna J., Portniaguine O.: *Seismic resolution and thin-bed reflectivity inversion*. „CSEG Recorder” 2006, January, s. 19–25.
- [5] Chopra S., Castagna J., Xu Y.: *Thin-bed Reflectivity Inversion and Some Applications*. „First Break” 2009, vol. 27, s. 55–62.
- [6] Chui C. K.: *An Introduction to Wavelets*. San Diego, Academic Press, 1992.
- [7] Daubechies I.: *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia, SIAM, 1992, s. 1–357.
- [8] Gabor D.: *Theory of Communication*. J.IEEE 1946, vol. 93(III), s. 429–457.
- [9] Kasina Z.: *Teoria sygnału sejsmicznego*. Kraków, Wydawnictwa AGH, 2009.
- [10] Mallat S., Zhang Z.: *Matching Pursuit with time-frequency dictionaries*. „IEEE Transactions on Signal Processing” 1993, vol. 41, issue 12, s. 3397–3415.
- [11] Marfurt K. J., Karlin R. L.: *Narrow band spectral analysis and thin bed tuning*. „Geophysics” 2001, vol. 66, s. 1274–1283.
- [12] Partyka G. A., Gridley J. A., Lopez J. A.: *Interpretational aspects of spectral decomposition in reservoir characterization*. „The Leasing Edge” 1999, vol. 18, s. 353–360.
- [13] Puryear C. I., Castagna J. P.: *Layer-thickness determination and stratigraphic interpretation using spectral inversion: Theory and application*. „Geophysics” 2008, vol. 73, s. 37–48.
- [14] Ryan H.: *Ricker, Ormsby, Klauder, Butterworth – A Choice of Wavelets*. „CSEG Recorder” 1994, September, s. 8–9.
- [15] Stockwell R. G., Mansinha L., Lowe R. P.: *Localization of the complex spectrum: The S Transform*. „IEEE Transactions on Signal Processing” 1996, vol. 44, s. 998–1001.
- [16] Widess M.: *How thin is a thin bed?* „Geophysics” 1973, vol. 38, s. 1176–1180.
- [17] Wojtaszczyk P.: *Teoria falek*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2000.



Mgr inż. Krzysztof ŻULAWIŃSKI – absolwent Wydziału Elektrotechniki, Elektroniki i Automatyki AGH, specjalność: Fizyka Stosowana. Pracownik Zakładu Geofizyki w Instytucie Nafty i Gazu w Krakowie. Zajmuje się teorią pola falowego, rozdzielczością i przetwarzaniem sejsmicznym oraz programowaniem. Zainteresowania: żeglarstwo, windsurfing, kongniwistyka.