

# Matematyczny model nieustalonego przepływu mieszaniny wodoru i gazu ziemnego w rurociągu

## Mathematical model of unsteady flow of a hydrogen and natural gas mixture in a pipeline

Marta Gburzyńska

*Państwowa Akademia Nauk Stosowanych im. Ignacego Mościckiego w Ciechanowie*

**STRESZCZENIE:** W niniejszym artykule opisany został matematyczny model przepływu gazu w stanie nieustalonym, który następnie został uzupełniony do postaci prezentującej matematyczny model mieszaniny wodoru i gazu ziemnego. Model ten jest wyprowadzany za pomocą równań ruchu, ciągłości oraz stanu i dostarcza precyzyjnego opisu dynamicznych aspektów przepływu gazu. Badania matematyczne obejmują dodanie wodoru do gazu ziemnego, mając na celu umożliwienie zrozumienia wpływu tej modyfikacji na właściwości mieszaniny gazów. Model matematyczny mieszaniny gazów jest linearyzowany w celu zapisu w postaci operatorowej. Postać operatorowa modelu daje możliwość między innymi definicji funkcji przejścia. Funkcje przejścia definiowane są w celu badania reakcji wejście–wyjście. Po przekształceniu do postaci operatorowej funkcje przejścia są wykorzystywane do badania właściwości dynamicznych układu. Kolejnym etapem jest opis funkcji przejścia w postaci widmowej, aby zbadać właściwości dynamiczne rurociągu z wykorzystaniem analizy częstotliwościowej. Charakterystyki częstotliwościowe opisują zachowanie układu w stanie ustalonym przy sygnałach sinusoidalnych. Wyrażają relację między odpowiedzią układu a zadaniem wymuszeniem harmonicznym, zmieniającym się w określonym zakresie prędkości kątowej. Charakterystyki częstotliwościowe w skali logarytmicznej przedstawione oddzielnie dla modułu liczby określającej stosunek amplitudy sygnału wyjściowego do amplitudy sygnału wejściowego oraz logarytmicznej charakterystyki fazowej, czyli zależności przesunięcia fazowego od prędkości kątowej przedstawionej w skali logarytmicznej, nazywane są charakterystykami Bodego. Charakterystyki Bodego pozwalają analizować, jak dla określonych wartości prędkości kątowej sygnału wejściowego zmieniają się amplituda oraz przesunięcie fazy między sygnałem wyjściowym a wejściowym. Podstawowym celem przeprowadzonej analizy jest zrozumienie procesów przepływu gazu w warunkach nieustalonych. Jednym z kluczowych parametrów branych pod uwagę jest stosunek masowy wodoru do gazu ziemnego, oznaczany jako  $\theta$ . Ten współczynnik ma decydujące znaczenie dla zrozumienia właściwości mieszaniny gazów. Daje on cenne informacje na temat dynamiki mieszanki. Wpływ tej mieszaniny na procesy przepływu gazu jest istotny zarówno teoretycznie, jak i praktycznie. Prezentowana analiza stanowi istotny krok w kierunku lepszego zrozumienia tych procesów.

**Słowa kluczowe:** wodór, gaz ziemny, model matematyczny, przepływ gazów, mieszanina gazów, izotermiczny przepływ gazów, przestrzeń stanów, równanie stanu, zrównoważona energetyka.

**ABSTRACT:** This article describes a mathematical model of unsteady gas flow in an unsteady state, which is then extended to represent a mathematical model of a mixture of hydrogen and natural gas. This model is derived using equations of motion, continuity, and state, providing a precise description of the dynamic aspects of gas flow. The mathematical investigations include the addition of hydrogen to natural gas, aiming to understand the impact of this modification on the properties of the gas mixture. The mathematical model of the gas mixture is linearized for representation in operator form. The operator form of the model allows, among other things, the definition of transfer functions. Transfer functions are defined to examine input-output responses. After transformation into operator form, transfer functions are utilized to investigate the dynamic properties of the system. The next step involves describing the transfer functions spectrally to examine the dynamic properties of the pipeline using frequency analysis. Frequency characteristics describe the system's behavior in a steady state under sinusoidal signals. They elucidate the relationship between the system's response and a specified harmonic excitation, varying within a defined range of angular velocities. Frequency characteristics, presented separately for the magnitude of the number, determining the ratio of output signal amplitude to input signal amplitude, and the logarithmic phase characteristics, depicting the phase shift dependence on angular velocity presented in a logarithmic scale, are known as Bode characteristics. Bode characteristics allow the analysis of how amplitude and phase shift between the output and input signals change for specific angular velocity values of the input signal. The primary goal of the conducted analysis is to understand gas flow processes under unsteady conditions. One of the key parameters taken into account is the mass ratio of hydrogen to natural gas, denoted as  $\theta$ . This coefficient is

---

Autor do korespondencji: M. Gburzyńska, e-mail: [marta.gburzynska@pansim.edu.pl](mailto:marta.gburzynska@pansim.edu.pl)

Artykuł nadesłano do Redakcji: 15.01.2024 r. Zatwierdzono do druku: 11.04.2024 r.

crucial for understanding the properties of the gas mixture, providing valuable insights into its dynamics. The impact of this mixture on gas flow processes is significant both theoretically and practically. The presented analysis represents a crucial step towards a better understanding of these processes.

Key words: hydrogen, natural gas, mathematical model, gas flow, gas mixture, isothermal gas flow, state space, equation of state, sustainable energy.

## Wstęp

W perspektywie ekologii i zrównoważonego rozwoju wodor wyróżnia się jako potencjalnie kluczowe źródło energii ze względu na brak emisji dwutlenku węgla (CO<sub>2</sub>) podczas jego użytkowania. Jako czysty gaz palny jest rozważany jako perspektywiczne źródło energii w przyszłości (Gburzyńska i Kwaśniewski, 2023). W przypadku gdyby produkcja wodoru odbywała się z użyciem odnawialnych źródeł energii, eliminując tym samym znaczące emisje CO<sub>2</sub>, możliwe stałoby się generowanie i korzystanie z energii przy minimalnym wpływie na środowisko w postaci gazów cieplarnianych i zanieczyszczeń powietrza.

Jednakże wykorzystanie wodoru napotyka na wyzwania związane z przechowywaniem oraz jego naturalnym występowaniem w mieszaninie z innymi gazami, przede wszystkim gazem ziemnym (Eames et al., 2022; Gburzyńska 2023, 2024). W artykule został przedstawiony uproszczony matematyczny model dotyczący tej mieszanki, którego rozwiązanie oparto na metodzie przestrzeni stanów. Analiza koncentrowała się na efektach dodawania wodoru do gazu ziemnego, dążąc do przedstawienia, w jaki sposób ten proces wpływa na właściwości mieszanki. Taki model umożliwi bardziej wszechstronne zrozumienie zachowań fizycznych i termodynamicznych tej mieszanki, co ma kluczowe znaczenie w kontekście potencjalnego wykorzystania wodoru jako komponentu gazu dostarczanego do sieci gazowej (Director i Rohrer, 1976).

Wprowadzenie wodoru do tradycyjnej infrastruktury gazowej stawia przed nami istotne wyzwania związane m.in. z różnicami w charakterystykach obu gazów. Analiza matematyczna pomaga zidentyfikować potencjalne zagrożenia, takie jak zmiany parametrów przepływu czy kwestie związane z bezpieczeństwem dostaw gazu. Dodatkowo tego typu analizy mają kluczowe znaczenie w kontekście zrównoważonej energetyki, w której rola wodoru jako czystego źródła energii może okazać się kluczowa (Ogata, 2002).

## Matematyczny model

### izotermicznego nieustalonego przepływu gazu

Do tworzenia matematycznego modelu izotermicznego nieustalonego przepływu w rurociągu stosuje się następujące równania (Osładacz, 1987):

- równanie ciągłości;
- równanie ruchu;
- równanie stanu.

## Równanie ciągłości

Równanie ciągłości jest zasadą zachowania materii w odniesieniu do zjawiska przepływu płynu. Masa, która jest miarą ilości materii, nie może powstać ani zniknąć, stąd zmiana masy w objętości kontrolnej może być spowodowana tylko różnicą wpływu i wypływu do i z objętości. Równanie (1) jest prawem zachowania masy w postaci różniczkowej:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

gdzie:

$\rho$  – gęstość gazu,

$w$  – prędkość strumienia gazu,

$t$  – czas,

$x$  – współrzędna kartezjańska.

Mnożąc obie strony równania przez pole przekroju poprzecznego  $A$  oraz uwzględniając, że  $M = \rho \cdot w \cdot A$ , gdzie  $M$  – przepływ masowy, otrzymuje się:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = -\frac{\partial M}{\partial x} \quad (2)$$

## Równanie ruchu

Równanie ruchu (II prawo dynamiki Newtona) mówi, że algebraiczna suma sił działających na element płynu o określonej masie w określonej chwili jest równa zmianie pędu tego elementu w tej chwili.

$$\frac{d(Mw)}{dt} = \sum F_x \quad (3)$$

Lewa strona równania (3) może być wyrażona następująco (Osładacz, 1987):

$$\begin{aligned} \frac{d(Mw)}{dt} &= \frac{\partial(Mw)}{\partial t} + \frac{\partial(Mw \cdot w)}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho A w \cdot dx) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho A w^2) \cdot dx \end{aligned} \quad (4)$$

W przypadku transportu gazu rurociągiem wyróżnia się trzy składowe siły działającej na element gazu:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_1 + F_2 + F_3 = \\ &= g\rho A \cdot dx \cdot \sin \alpha + \left(-\rho \frac{Aw^2}{2D} \lambda\right) \cdot dx + \left(-\frac{\partial p}{\partial x} A\right) \cdot dx \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

$F_1$  – siła od ciężaru gazu znajdującego się wewnątrz powierzchni kontrolnej,

$F_2$  – siła od oporu hydraulicznego,

$F_3$  – siła od ciśnienia gazu,

$\alpha$  – kąt nachylenia osi rurociągu do poziomu,

$\lambda$  – współczynnik oporu hydraulicznego,

$D$  – średnica wewnętrzna.

Po przekształceniach otrzymuje się:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w^2) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda \rho w^2}{2D} - \rho g A \sin \alpha = 0 \quad (6)$$

### Równanie stanu

Równanie stanu opisuje wzajemną zależność pomiędzy parametrami stanu gazu (ciśnieniem, gęstością i temperaturą):

$$p/\rho = zRT \quad (7)$$

gdzie:

$R$  – uniwersalna stała gazowa,

$z$  – współczynnik ściśliwości, zależny od wartości krytycznych temperatury i ciśnienia oraz ich wartości rzeczywistych,

$T$  – temperatura gazu.

W przemianie izotermicznej ( $T = \text{const}$ ) zależność pomiędzy ciśnieniem a gęstością przyjmuje postać:

$$p/\rho = c^2 \quad (8)$$

gdzie:

$c$  – prędkość dźwięku w gazie,

$p$  – ciśnienie gazu.

Podstawiając równanie (8) do równania (1), otrzymuje się:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{A}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

Dokładny model matematyczny nieustalonego izotermicznego przepływu gazu w rurociągu poziomym ma postać (Osładacz, 1987):

$$\begin{cases} \frac{A}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{M^2}{A^2 \rho} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\lambda}{2DA^2} \frac{|M|M}{\rho} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

### Mieszanina wodoru i gazu ziemnego

Na bazie matematycznego modelu przepływu gazu (10) poniżej wyprowadzono matematyczny model mieszaniny wodoru i gazu ziemnego.

Stosunek masowy wodoru (Agaie et al., 2020; Hafsi et al., 2020):

$$\theta = \frac{Mas_w}{Mas_g + Mas_w} \quad (11)$$

gdzie:

$Mas_w$  – masa wodoru,

$Mas_g$  – masa gazu ziemnego.

Gęstość wodoru i gazu ziemnego określone są jako:

$$\rho_w = Mas_w/V_w \quad (12)$$

$$\rho_g = Mas_g/V_g \quad (13)$$

gdzie:

$V_w$  – objętość wodoru,

$V_g$  – objętość gazu ziemnego.

Objętość właściwa mieszaniny wodoru i gazu ziemnego jest definiowana jako:

$$1/\rho = V_m/Mas_m \quad (14)$$

gdzie:

$V_m = V_w + V_g$  – objętość mieszaniny wodoru i gazu ziemnego,

$Mas_m = Mas_w + Mas_g$  – masa mieszaniny wodoru i gazu ziemnego.

Gęstość wodoru oraz gazu ziemnego zgodnie z procesem politropowym są zapisywane jako:

$$\rho_w = \rho_{w_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/n} \quad (15)$$

$$\rho_g = \rho_{g_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/n'} \quad (16)$$

gdzie:

$\rho_{w_0}$  – początkowa gęstość wodoru,

$\rho_{g_0}$  – początkowa gęstość gazu ziemnego,

$p$  – ciśnienie wzdłuż rurociągu,

$p_0$  – ciśnienie początkowe,

$n$  – indeks procesu przepływu dla wodoru,

$n'$  – indeks procesu przepływu dla gazu ziemnego.

Dla średniej gęstości mieszaniny można zapisać:

$$\rho = \left[ \frac{\theta}{\rho_w} + \frac{(1-\theta)}{\rho_g} \right]^{-1} = \left[ \frac{\theta}{\rho_{w_0}} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/n} + \frac{(1-\theta)}{\rho_{g_0}} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/n'} \right]^{-1} \quad (17)$$

Dla przepływu sprężystego prędkość fal ciśnienia definiowana jest następująco:

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (18)$$

gdzie:

$s$  – warunek stałej entropii.

Związek równania stanu z prędkością fal ciśnienia  $c$  można zapisać w postaci:

$$p = \rho c^2 \quad (19)$$

Podstawiając (17) do (18), uzyskuje się:

$$c = \left[ \frac{\theta}{\rho_{w_0}} \left( \frac{p_0}{P} \right)^{1/n} + \frac{(1-\theta)}{\rho_{g_0}} \left( \frac{p_0}{P} \right)^{1/n'} \right] \cdot \left\{ \frac{1}{P} \left[ \frac{\theta}{n \rho_{w_0}} \left( \frac{p_0}{P} \right)^{1/n} + \frac{(1-\theta)}{n' \rho_{g_0}} \left( \frac{p_0}{P} \right)^{1/n'} \right] \right\}^{-1/2} \quad (20)$$

W uproszczonym matematycznym modelu przyjęto, że rurociąg jest ułożony poziomo ( $\rho g \sin \alpha = 0$ ). Ostatecznie można zapisać (Osładacz i Gburzyńska, 2022):

$$\begin{cases} \frac{A}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{2DA^2} \frac{|M| M}{\rho} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

### Linearyzacja modelu

Dla uproszczenia modelu matematycznego opisanego układem równań różniczkowych nieliniowych stosuje się linearyzację tych równań. Pozwala to na sformułowanie przybliżonego opisu liniowego zjawiska w otoczeniu wybranego punktu pracy na charakterystyce statycznej (punkt ten odpowiada najczęściej nominalnym lub uśrednionym warunkom pracy układu). Badanie układów liniowych jest podejmowane z dwóch powodów. Po pierwsze, wiele układów zachowuje liniowość w użytecznych przedziałach pracy, po drugie, dokładna analiza matematyczna układów liniowych jest znacznie prostsza niż analiza w bardziej ogólnym ujęciu. Poniżej zbadano zachowanie się zmiennych modelu wokół stanu ustalonego, tzn. rozważono przebiegi odchyleń tych zmiennych od ich wartości w stanie ustalonym. Ponieważ zmienne modelu są funkcjami  $x$  oraz  $t$ , więc odchylenia tych zmiennych od wartości w stanie ustalonym są również funkcjami  $x$  oraz  $t$  zgodnie z zależnością:

$$u(x,t) = u_s + \Delta u(x,t) \quad (22)$$

Odchylenia te nazywane są zmiennymi przyrostowymi i oznacza się je symbolem  $\Delta u(x,t)$ , a  $u_s$  oznacza wartość stanu ustalonego. Przyjmuje się, że zmienne przyrostowe spełniają warunek  $|\Delta u/u| \leq 1$ .

Wartości zmiennych przyrostowych powinny być na tyle małe, żeby człony zawierające te wielkości można było pominąć, tzn.:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = (u_s + \Delta u) \frac{\partial}{\partial x} = u_s \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \Delta u \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \quad (23)$$

co oznacza, że ostatni człon w równaniu (23) można pominąć jako nieznaczący.

Wykorzystując równanie (23), można przedstawić wartości ciśnienia  $p(x,t)$  oraz przepływu masowego  $M(x,t)$  w gazociągu w postaci:

$$p(x,t) = p_s(x) + \Delta p(x,t) \quad (24)$$

$$M(x,t) = M_s + \Delta M(x,t) \quad (25)$$

gdzie:  $\Delta p(x,t)$  oraz  $\Delta M(x,t)$  oznaczają niewielkie odchylenia od stanu ustalonego odpowiednio ciśnienia  $p_s(x)$  i przepływu  $M_s$ .

Człony nieliniowe w układzie równań (21) są linearyzowane poprzez rozwinięcie w szereg Taylora wokół punktu stanu ustalonego o współrzędnych  $M_s, \rho_s$ . W rezultacie otrzymuje się:

$$\frac{|M| M}{\rho} = \frac{|M_s| M_s}{\rho_s} \left\{ 1 + \left[ \frac{2\Delta M}{M_s} - \frac{\Delta \rho}{\rho_s} \right] + \left[ \left( \frac{\Delta M}{M_s} \right)^2 - 2 \frac{\Delta M}{M_s} \frac{\Delta \rho}{\rho_s} + \left( \frac{\Delta \rho}{\rho_s} \right)^2 \right] + 0 \cdot (\Delta M^3, \Delta \rho^3) \right\} \quad (26)$$

Zastępując wartość gęstości i prędkości ( $\rho_s(x), w_s(x)$ ) wartościami średnimi po długości ( $\rho_s, w_s$ ), uzyskuje się:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \Delta M}{\partial t} + \frac{\partial \Delta p}{\partial x} - \frac{1}{A^2} \frac{M_s M_s}{\rho_s^2 c^2} \frac{\partial \Delta p}{\partial x} + \frac{2}{A^2} \frac{M_s}{\rho_s} \frac{\partial \Delta M}{\partial x} - \frac{\lambda}{DA^2} \frac{|M_s| M_s}{\rho_s^2(x) c^2} \Delta p + \frac{\lambda}{DA^2} \frac{|M_s|}{\rho_s(x)} \Delta M = 0 \quad (27)$$

Ostatecznie równanie ruchu przyjmuje następującą postać:

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial x} - \frac{1}{A^2} \frac{M_s M_s}{\rho_s^2 c^2} \frac{\partial \Delta p}{\partial x} = -\frac{1}{A} \frac{\partial \Delta M}{\partial t} - \frac{2}{A^2} \frac{M_s}{\rho_s} \frac{\partial \Delta M}{\partial x} + \frac{\lambda}{DA^2} \frac{|M_s| M_s}{\rho_s^2(x) c^2} \Delta p - \frac{\lambda}{DA^2} \frac{|M_s|}{\rho_s(x)} \Delta M \quad (28)$$

Dla małych odchyleń, odrzucając mało znaczące wyrazy, równania (9) oraz (27) można zapisać w postaci układu równań:

$$C' \frac{\partial \Delta p}{\partial t} + \frac{\partial \Delta M}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial x} + S' \frac{\partial \Delta M}{\partial x} - T' \frac{\partial \Delta p}{\partial x} - P' \Delta p - L' \frac{\partial \Delta M}{\partial t} + R' \Delta M = 0 \quad (30)$$

gdzie:

$$C' = A/c^2$$

$$L' = 1/A$$

$$T' = \frac{1}{A^2} \frac{M_s M_s}{\rho_s^2(x) c^2}$$

$$R' = \frac{\lambda}{D \cdot A^2} \frac{|M_s|}{\rho_s(x)}$$

$$P' = \frac{\lambda}{2D \cdot A^2} \frac{|M_s| |M_s|}{\rho_s^2(x) c^2}$$

$$S' = \frac{2}{A^2} \frac{M_s}{\rho_s(x)}$$

Równania (29) oraz (30) są równaniami różniczkowymi cząstkowymi, liniowymi o stałych współczynnikach. Równania te poniżej przekształcono przy użyciu transformaty Laplace'a do postaci operatorowej.

### Postać operatorowa modelu

Stosując przekształcenia Laplace'a do równania (29) i (30) (Kontorowicz, 1956):

$$\mathcal{L}(\Delta p(t)) = \Delta p(s)$$

$$\mathcal{L}(\Delta M(t)) = \Delta M(s)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial \Delta p}{\partial t}\right) = s \cdot \Delta p(s)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial \Delta M}{\partial t}\right) = s \cdot \Delta M(s)$$

po przekształceniach uzyskuje się następujący układ równań:

$$\frac{\partial \Delta M}{\partial \varepsilon} = -C's \cdot \Delta p(s) \quad (31)$$

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \varepsilon} = \frac{(S'C's + P')}{(1-T')} \Delta p(s) - \frac{(L's + R')}{(1-T')} \Delta M(s) \quad (32)$$

gdzie:

$$\varepsilon = x/L \text{ (Kralik et al., 1984)}$$

Równania (30) i (31) można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta p}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial \Delta M}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta p(s) \\ \Delta M(s) \end{bmatrix} \quad (33)$$

gdzie:

$$\gamma_1 = \frac{S'C's + P'}{1-T'}, \gamma_2 = \frac{L's + R'}{1-T'}, \gamma_3 = C's$$

$$\gamma_1 = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 s$$

$$\gamma_2 = \mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_4 s$$

$$\gamma_3 = \mathfrak{g}_5 s$$

$$\mathfrak{g}_1 = \frac{1}{2} \frac{\lambda L |w_s| w_s}{D c^2}$$

$$\mathfrak{g}_2 = \frac{2 w_s L}{c^2}$$

$$\mathfrak{g}_3 = \frac{\lambda L |w_s|}{DA}$$

$$\mathfrak{g}_4 = \frac{L}{A}$$

$$\mathfrak{g}_5 = \frac{AL}{c^2}$$

lub w postaci równania:

$$\underline{y}'(\varepsilon) = \underline{A} \cdot \underline{y}(\varepsilon) \quad (34)$$

gdzie:

$$\underline{y}'(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta p}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial \Delta M}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \Delta p(s) \\ \Delta M(s) \end{bmatrix}$$

Stosując przekształcenia Laplace'a do równań (33) po  $\varepsilon$ , otrzymuje się:

$$q \Delta p(s, q) - \Delta p(s, 0) = \gamma_1 \Delta p(s, q) - \gamma_2 \Delta M(s, q) \quad (35)$$

$$q \Delta M(s, q) - \Delta M(s, 0) = -\gamma_3 \Delta p(s, q) \quad (36)$$

Podstawiając (36) do (35), wyznacza się:

$$\Delta p(s, q) = \frac{q}{q^2 - \gamma_1 q - \gamma_2 \gamma_3} \Delta p(s, 0) - \frac{\gamma_2}{q^2 - \gamma_1 q - \gamma_2 \gamma_3} \Delta M(s, 0) \quad (37)$$

Dokonując przekształcenia odwrotnego zgodnie ze wzorami:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{q}{aq^2 - bq - c\gamma_3}\right) = \frac{1}{a\Delta} e^{2a\varepsilon} \left( b\sqrt{\Delta} \cosh \varepsilon \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} + \Delta \sinh \varepsilon \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{aq^2 - bq - c\gamma_3}\right) = \frac{2e^{2a\varepsilon} \sinh \varepsilon \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}{\sqrt{\Delta}}$$

gdzie:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2} \left( \gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_2\gamma_3} \right)$$

$$\alpha - \beta = \frac{1}{2} \left( \gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_2\gamma_3} \right)$$

przy czym:

$$\alpha = \frac{1}{2} \gamma_1, \beta = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_2\gamma_3}$$

otrzymuje się:

$$\Delta p(s, \varepsilon) = e^{\alpha\varepsilon} \left( \cosh \beta\varepsilon + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta\varepsilon \right) \Delta p(s, 0) - Z_w \sinh \beta\varepsilon \Delta M(s, 0) \quad (38)$$

Podstawiając (35) do (36), otrzymuje się:

$$q\Delta M(s, q) - \Delta M(s, 0) = -\gamma_3 \left( \frac{\Delta p(s, 0)}{q - \gamma_1} - \frac{\gamma_2}{q - \gamma_1} \Delta M(s, 0) \right)$$

skąd można wyznaczyć:

$$\Delta M(s, q) = -\frac{\gamma_3}{q^2 - \gamma_1 q - \gamma_2 \gamma_3} \Delta p(s, 0) + \frac{q - \gamma_1}{q^2 - \gamma_1 q - \gamma_2 \gamma_3} \Delta M(s, 0) \quad (39)$$

Dokonując przekształcenia odwrotnego, uzyskujemy:

$$\Delta M(s, \varepsilon) = e^{\alpha \varepsilon} \left( -\frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta \varepsilon + \cosh \beta \varepsilon \right) \Delta M(s, 0) + \frac{1}{Z_w} \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 1 \right) \sinh \beta \varepsilon \Delta p(s, 0) \quad (40)$$

Przyjmując oznaczenia:

$$\Delta p(s, \varepsilon) = \Delta p_2$$

$$\Delta M(s, \varepsilon) = \Delta M_2$$

$$\Delta p(s, 0) = \Delta p_1$$

$$\Delta M(s, 0) = \Delta M_1$$

ostatecznie otrzymuje się, dla  $x = L$ :

$$\Delta p_2 = e^{\alpha} \left[ \left( \cosh \beta + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta \right) \Delta p_1 - Z_w \sinh \beta \Delta M_1 \right] \quad (41)$$

$$\Delta M_2 = e^{\alpha} \left[ \left( -\frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta + \cosh \beta \right) \Delta M_1 + \frac{1}{Z_w} \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 1 \right) \sinh \beta \Delta p_1 \right] \quad (42)$$

Stąd równanie (34) można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \Delta p_2(s) \\ \Delta M_2(s) \end{bmatrix} = e^{\alpha} \begin{bmatrix} \cosh \beta + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta & -Z_w \sinh \beta \\ -\frac{1}{Z_w} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \sinh \beta & \cosh \beta - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1(s) \\ \Delta M_1(s) \end{bmatrix} \quad (43)$$

gdzie:

$$Z_w = \frac{\gamma_2}{\beta} = \frac{R' + sL'}{(1 - T')\beta}$$

Z układu (43) można wyznaczyć:

$$\Delta p_2(s) = e^{\alpha} \frac{1}{\cosh \beta - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta} \Delta p_1(s) - \frac{Z_w \sinh \beta}{\cosh \beta - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta} \Delta M_2(s) \quad (44)$$

oraz:

$$\Delta M_1(s) = \frac{1}{Z_w} \frac{(1 - \alpha^2 / \beta^2) \sinh \beta}{\cosh \beta - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta} \Delta p_1(s) + e^{-\alpha} \frac{1}{\cosh \beta - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta} \Delta M_2(s) \quad (45)$$

i zapisać te równania w postaci operatorowej w następujący sposób:

$$\Delta p_2(s) = H_1(s) \Delta p_1(s) + H_2(s) \Delta M_2(s) \quad (46)$$

$$\Delta M_1(s) = H_3(s) \Delta p_1(s) + H_4(s) \Delta M_2(s) \quad (47)$$

gdzie:

$$H_1(s) = \frac{\Delta p_2(s)}{\Delta p_1(s)} = \frac{e^{\alpha}}{\cosh \beta - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta} \quad (48)$$

$$H_3(s) = \frac{\Delta M_1(s)}{\Delta p_1(s)} = \frac{1}{Z_w} \frac{(1 - \alpha^2 / \beta^2) \sinh \beta}{\cosh \beta - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta} \quad (49)$$

przy założeniu, że  $\Delta M_2(s) = 0$ ,

oraz:

$$H_2(s) = \frac{\Delta p_2(s)}{\Delta M_2(s)} = -\frac{Z_w \sinh \beta}{\cosh \beta - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta} \quad (50)$$

$$H_4(s) = \frac{\Delta M_1(s)}{\Delta M_2(s)} = \frac{e^{-\alpha}}{\cosh \beta - \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta} \quad (51)$$

przy założeniu, że  $\Delta p_1(s) = 0$ .

$$\text{We wzorach } \alpha = \frac{P' + sS'C'}{2(1 - T')} \text{ i } \beta = \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{1 - T'} sC'(R' + sL')}$$

wprowadzono oznaczenia:

$$\omega_G = \frac{R'}{L'}; \gamma = \frac{P'}{2R'} \sqrt{\frac{L'}{C'}}; \delta = \frac{S'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}}; c = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$$

Wzory na  $\alpha$  i  $\beta$  można zapisać w następujący sposób:

$$\alpha = \frac{1}{1 - T'} \frac{\omega_G}{c} (\gamma + j\omega^* \delta) \quad (52)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - T'}} \frac{\omega_G}{c} \sqrt{\frac{\gamma^2}{1 - T'} - \omega^{*2} \left( 1 + \frac{\delta^2}{1 - T'} \right) + j\omega^* (1 + 2\gamma\delta)} \quad (53)$$

gdzie:

$$\omega^* = \omega / \omega_G$$

Dla szybkozmiennych przepływów przyjęto (według Weimana, 1974), że:

$$T' = 0$$



$$\delta = \frac{S'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} = 0$$

co powoduje zmianę wartości  $\alpha$  i  $\beta$  na  $\alpha'$  i  $\beta'$  i otrzymuje się:

$$\alpha' = \frac{\omega G}{c} \gamma$$

$$\beta' = \frac{\omega G}{c} \sqrt{\gamma^2 - \omega^{*2} + j\omega^*}$$

Funkcje przejścia definiowane są w celu badania reakcji wejście–wyjście. Po przekształceniu do postaci operatorowej (Osowski, 1981) funkcje przejścia są wykorzystywane do badania właściwości dynamicznych układów. Aby funkcję przejścia przekształcić do postaci operatorowej, należy funkcje trygonometryczne rozwinąć w szereg potęgowy (Osiadacz i Gburzyńska, 2022). Otrzymuje się wówczas:

$$H_1(s) = \frac{k_1}{1 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_2 s^2} \quad (54)$$

$$H_2(s) = -k_2 \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2}{1 + a_1 s + a_2 s^2} \quad (55)$$

$$H_3(s) = \frac{c_1 s + c_2 s^2}{1 + a_1 s + a_2 s^2} \quad (56)$$

$$H_4(s) = \frac{1}{1 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2} \quad (57)$$

gdzie:

$$k_1 = e^{\vartheta_1}$$

$$\tilde{a}_1 = a_1 - \frac{1}{2} \vartheta_2$$

$$\tilde{a}_2 = a_2 + \frac{1}{8} \vartheta_2^2 - \frac{1}{2} \vartheta_2 a_1$$

$$a_1 = \frac{\frac{1}{2} \vartheta_3 \vartheta_5 \left( 1 - \frac{1}{6} \vartheta_1 + \frac{1}{24} \vartheta_1^2 - \frac{1}{240} \vartheta_1^3 + \dots \right)}{e^{-\frac{1}{2} \vartheta_1}} - \frac{1}{2} \vartheta_2$$

$$a_2 = e^{\frac{1}{2} \vartheta_1} \left( \frac{1}{24} \vartheta_3^2 \vartheta_5^2 \left( 1 - \frac{1}{10} \vartheta_1 \right) + \frac{1}{2} \vartheta_4 \vartheta_5 \left( 1 - \frac{1}{6} \vartheta_1 + \frac{1}{24} \vartheta_1^2 - \frac{1}{240} \vartheta_1^3 + \dots \right) - \frac{1}{12} \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_5 \left( 1 - \frac{1}{2} \vartheta_1 + \frac{1}{16} \vartheta_1^2 - \dots \right) + \frac{1}{8} \vartheta_2^2 \right)$$

$$b_1 = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3} + \frac{1}{6} \frac{\vartheta_3 \vartheta_5 \left( 1 + \frac{1}{40} \vartheta_1^2 \right) + \frac{1}{12} \vartheta_2 \vartheta_1 \left( 1 + \frac{1}{40} \vartheta_1^2 \right)}{1 + \frac{1}{24} \vartheta_1^2 + \frac{1}{1920} \vartheta_1^4}$$

$$b_2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3} \left[ \frac{1}{6} \vartheta_3 \vartheta_5 \left( 1 + \frac{1}{40} \vartheta_1^2 \right) + \frac{1}{12} \vartheta_2 \vartheta_1 \left( 1 + \frac{1}{40} \vartheta_1^2 \right) \right] + \\ + \frac{1}{120} \vartheta_2^2 \vartheta_1^2 + \frac{1}{6} \vartheta_4 \vartheta_5 \left( 1 + \frac{1}{40} \vartheta_1^2 \right) + \frac{1}{120} \vartheta_3 \vartheta_5 \vartheta_2 + \\ + \frac{1}{4} \vartheta_2^2 \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{80} \vartheta_1^2 \right) \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{24} \vartheta_1^2 + 1 + \frac{1}{1920} \vartheta_1^4}$$

$$k_2 = e^{\frac{1}{2} \vartheta_1} \vartheta_3 \left( 1 + \frac{1}{24} \vartheta_1^2 + \frac{1}{1920} \vartheta_1^4 \right)$$

$$c_1 = e^{\frac{1}{2} \vartheta_1} \vartheta_5 \left( 1 + \frac{1}{24} \vartheta_1^2 + \frac{1}{1920} \vartheta_1^4 + \dots \right)$$

$$c_2 = e^{\frac{1}{2} \vartheta_1} \vartheta_5 \left( \frac{1}{6} \vartheta_3 \vartheta_5 + \frac{1}{12} \vartheta_2 \vartheta_1 \right) \left( 1 + \frac{1}{40} \vartheta_1^2 \right)$$

$$\bar{a}_1 = \tilde{a}_1 + \vartheta_2$$

$$\bar{a}_2 = \tilde{a}_2 + \vartheta_2 \tilde{a}_1$$

### Charakterystyka Bodego

Aby badać właściwości dynamiczne rurociągu z wykorzystaniem analizy częstotliwościowej, konieczne jest przedstawienie funkcji przejścia w formie widmowej. Operację tę wykonuje się, zamieniając operator  $s$  na złożenie  $j\omega$ :

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega)$$

gdzie:

$j$  – jednostka urojona liczby zespolonej,

$\omega$  – prędkość kątowna,

$\omega = 2\pi f$ ,

$f = 1/T$ ,

$T$  – okres funkcji.

Funkcję  $H(j\omega)$  nazywamy transmitancją widmową.

Charakterystyki częstotliwościowe opisują zachowanie układu w stanie ustalonym przy sygnałach sinusoidalnych. Te charakterystyki opisują relację między odpowiedzią układu a zadaniem wymuszenia harmonicznego, zmieniającego się w określonym zakresie prędkości kątownej. Wykorzystanie sygnału sinusoidalnego jako sygnału testowego ma uzasadnienie z kilku powodów. Po pierwsze, odpowiedź stabilnego, liniowego układu na dowolny sygnał okresowy to suma odpowiedzi dla każdej składowej (sinusoidalnej) sygnału wejściowego, dzięki rozkładowi sygnału na szereg Fouriera. Po drugie, każdy sygnał okresowy może być przedstawiony jako suma sygnałów sinusoidalnych, które są łatwe do wygenerowania.

Wprowadzając na wejściu układu liniowego i stacjonarnego sygnał sinusoidalny:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$$

gdzie  $A$  – amplituda, po pewnym czasie na wyjściu, po wygaśnięciu stanów przejściowych, uzyskuje się również sinusoidalny sygnał o tej samej prędkości kątownej co sygnał wejściowy. Sygnał wyjściowy w ogólnym przypadku ma inną amplitudę niż sygnał wejściowy i jest opóźniony w fazie względem niego:

$$y(t) = B \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

gdzie:

$B$  – amplituda,

$\varphi$  – przesunięcie fazowe.

Układ można opisać stosunkiem amplitudy na wyjściu do amplitudy na wejściu oraz różnicą faz w zakresie prędkości kątowej. Liczbę  $M(\omega)$ , określającą stosunek amplitudy sygnału wyjściowego do amplitudy sygnału wejściowego, nazywamy charakterystyką częstotliwościową lub wzmocnieniem układu:

$$M(\omega) = B(\omega)/A(\omega) = |H(j\omega)| \text{ [dB]}$$

Jeśli  $M(\omega)$  jest mniejsze niż jedność, występuje tłumienie układu. Przesunięcie fazowe wprowadzone przez układ, oznaczone jako:

$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) \text{ [rad]}$$

nazywamy charakterystyką fazową. Określa ona przesunięcie fazowe sygnału wyjściowego względem sygnału wejściowego w funkcji  $\omega$ . Wartość ujemna charakterystyki fazowej oznacza opóźnienie sygnału wyjściowego względem sygnału wejściowego.

Charakterystyki częstotliwościowe w skali logarytmicznej przedstawione oddzielnie dla modułu mają postać:

$$L(\omega) = 20 \log M(\omega) \text{ [dB]}$$

i postać logarytmicznej charakterystyki fazowej, czyli zależności przesunięcia fazowego od prędkości kątowej przedstawionej w skali logarytmicznej, i nazywane są charakterystykami Bodego. Charakterystyki Bodego pozwalają analizować, jak dla określonych wartości prędkości kątowej sygnału wejściowego

zmieniają się amplituda oraz przesunięcie fazy między sygnałem wyjściowym a wejściowym. Skala prędkości kątowej jest przedstawiana na wykresach w postaci logarytmicznej, skala amplitudy w decybelach, a skala przesunięcia fazowego w kątach lub w radianach.

Zaletą charakterystyki Bodego jest to, że iloczyny czynników w wyrażeniu stają się sumami składników, co wynika z zastosowania zapisu logarytmicznego. Drugą zaletą to czytelne przedstawienie charakterystyki w szerokim zakresie zmian prędkości kątowej.

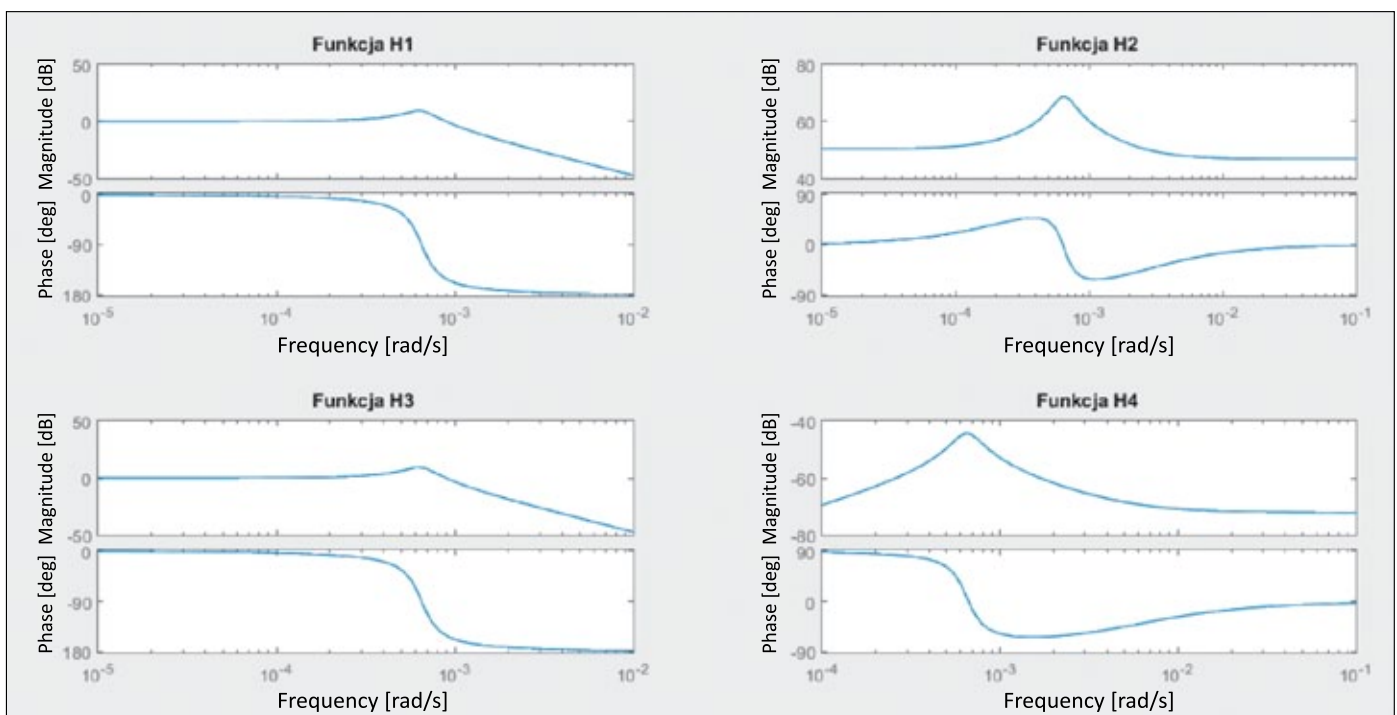
## Analiza

Obliczenia przeprowadzono dla rurociągu długości  $L = 100$  [km], średnicy  $D = 0,3$  [m] oraz stosunku masy wodoru  $\theta = 0; \theta = 0,25; \theta = 0,5; \theta = 1$ .

Warunki brzegowe:

- dla  $x = 0$ :
  - $-p_1 = 5$  [MPa];
- dla  $x = L$ :
  - obciążenie w postaci przepływu masowego:
 
$$M = M_0 + 0,5 \cdot M_0 \cdot \sin(\omega t)$$
, gdzie  $M_0 = 240$  [kg/s];
  - $-\omega = 4\pi/t$  [rad/s].

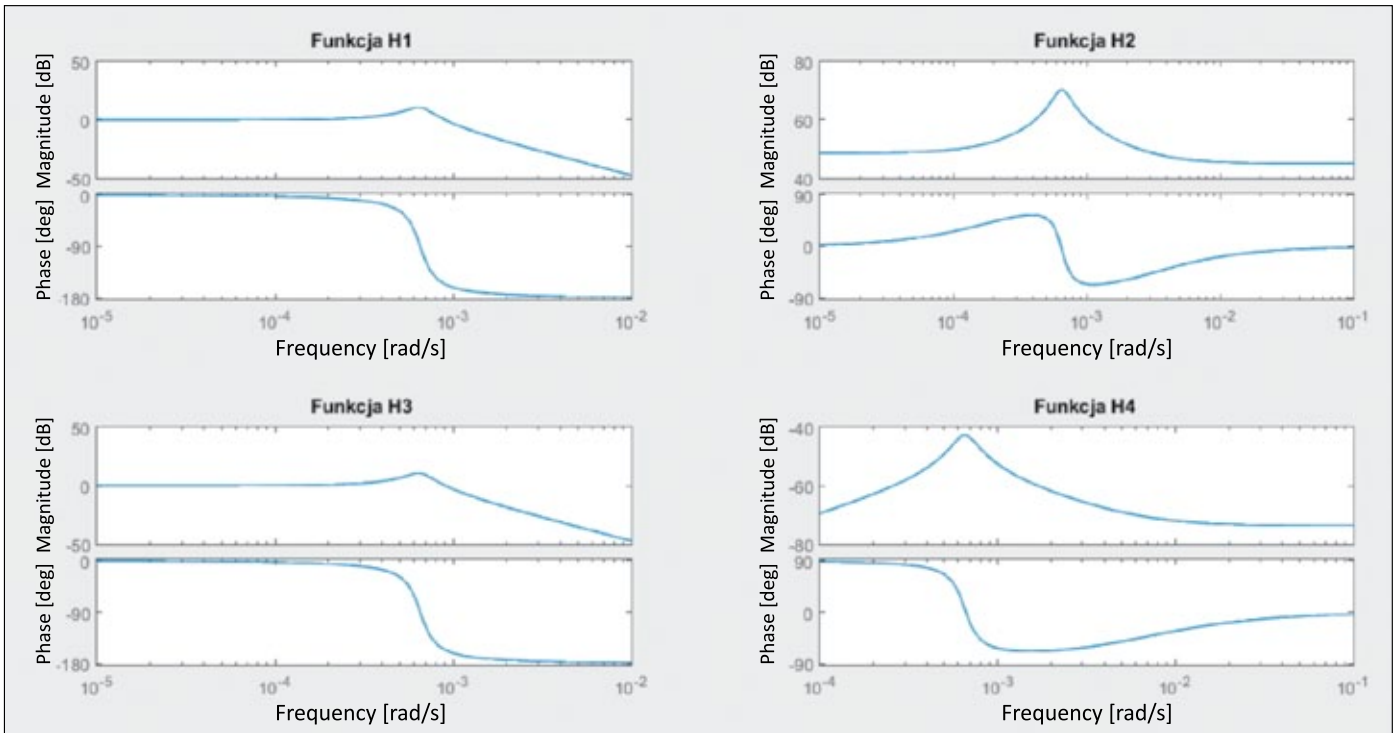
Do symulacji przepływu został wykorzystany program MATLAB – program komputerowy będący interaktywnym środowiskiem do wykonywania obliczeń naukowych i inżynierskich oraz do tworzenia symulacji komputerowych.



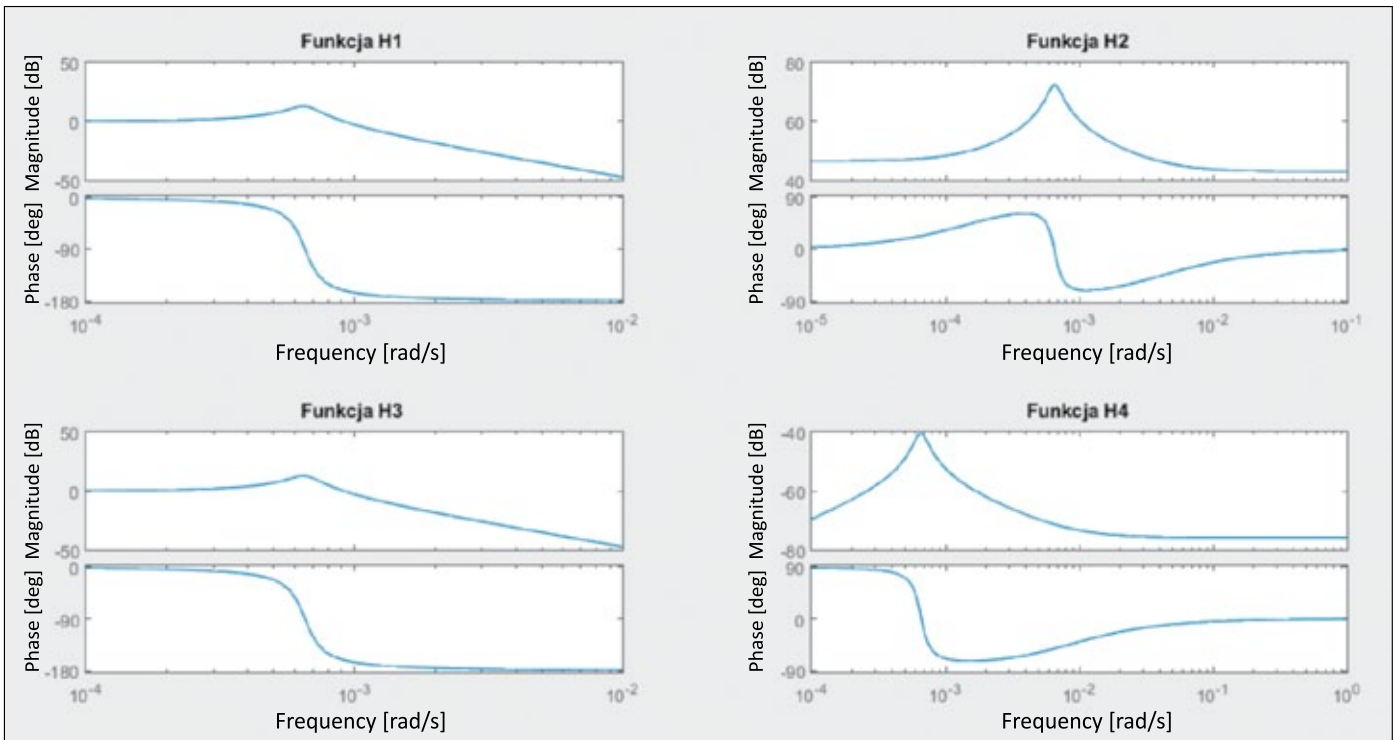
Rysunek 1. Rezultat obliczeń dla gazu ziemnego ( $\theta = 0$ )

Figure 1. Calculation result for natural gas ( $\theta = 0$ )





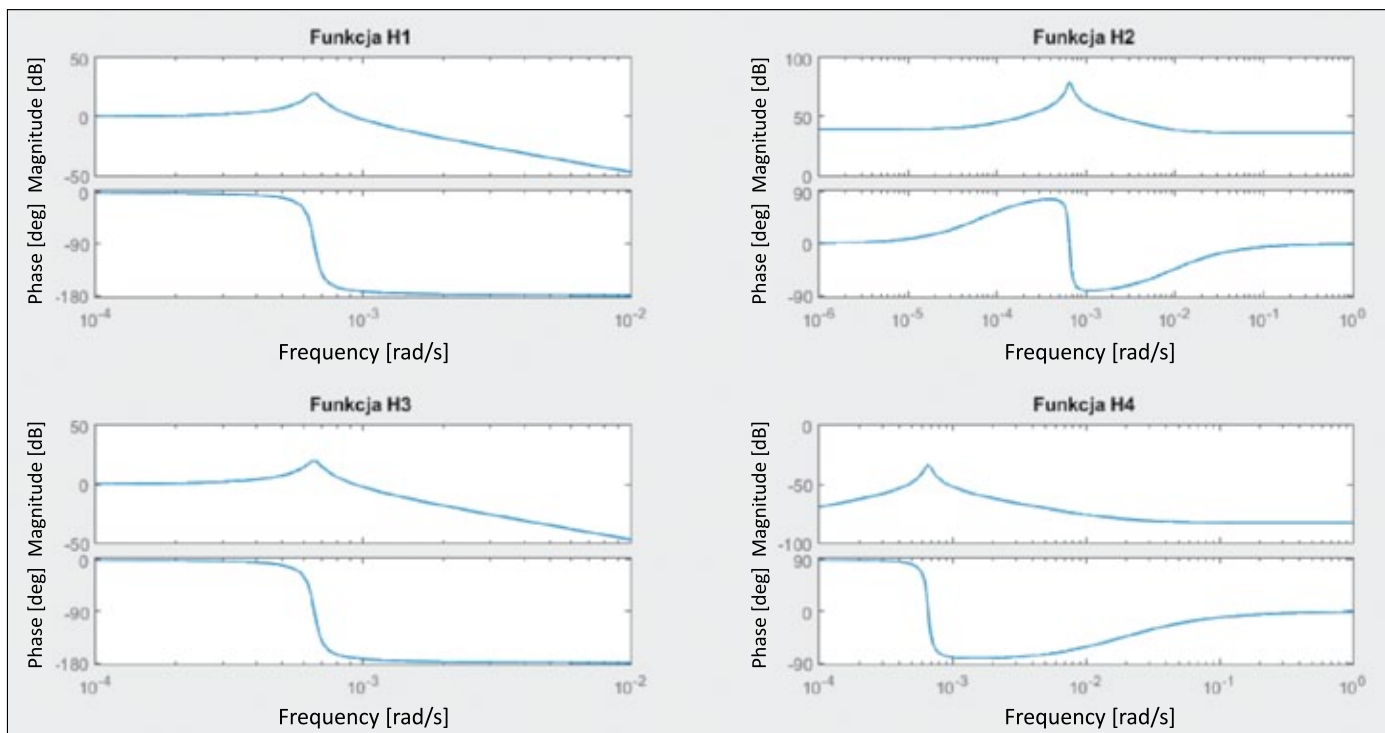
**Rysunek 2.** Rezultat obliczeń dla mieszaniny wodoru i gazu ziemnego ( $\theta = 0,25$ )  
**Figure 2.** Calculation result for a mixture of hydrogen and natural gas ( $\theta = 0.25$ )



**Rysunek 3.** Rezultat obliczeń dla mieszaniny wodoru i gazu ziemnego ( $\theta = 0,5$ )  
**Figure 3.** Calculation result for a mixture of hydrogen and natural gas ( $\theta = 0.5$ )

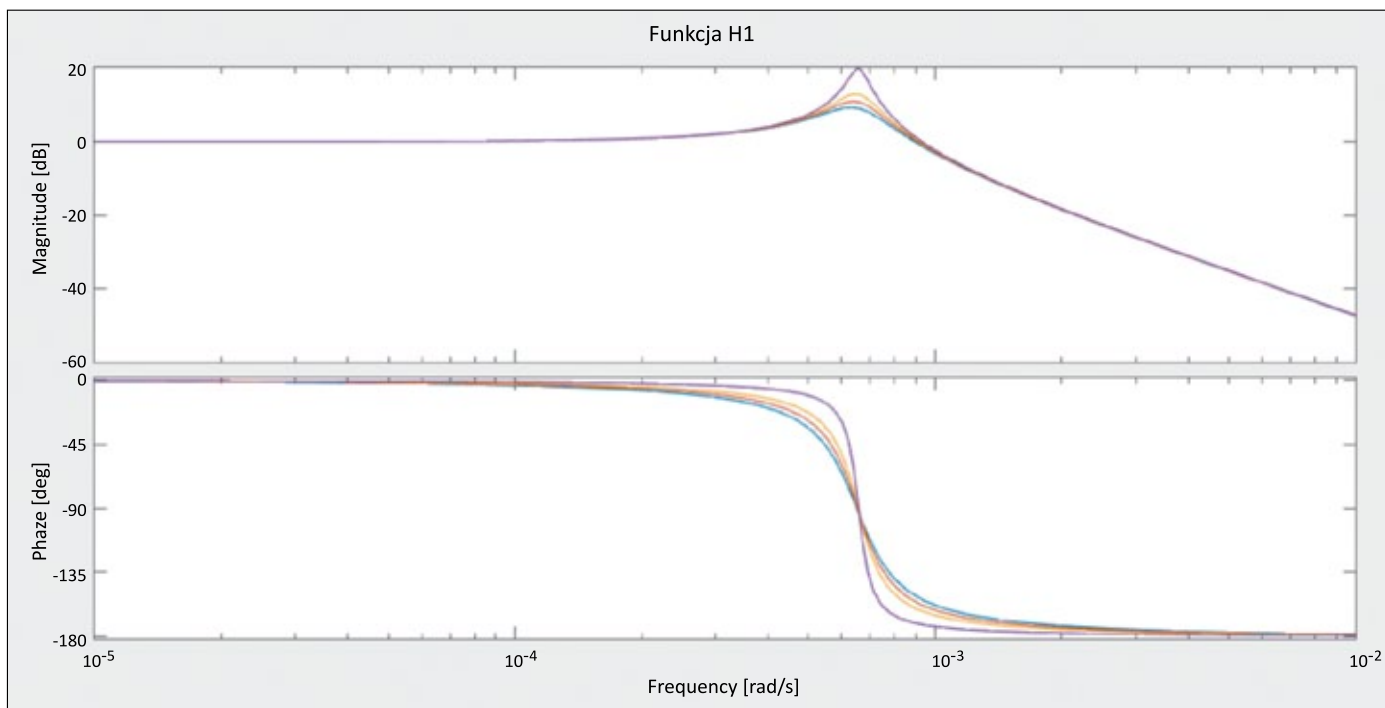
Na wykresach na rysunkach 1–4 przedstawione są logarytmiczne charakterystyki amplitudowe i fazowe (wykresy Bodego) dla funkcji opisanych wzorami (54)–(57) przy różnych wartościach stosunku masowego wodoru  $\theta$ .

Na rysunkach 5–8 rezultaty modelu dla  $\theta = 0$  oznaczono kolorem niebieskim, dla  $\theta = 0,25$  kolorem czerwonym, dla  $\theta = 0,5$  kolorem pomarańczowym, a dla  $\theta = 1$  kolorem fioletowym.



**Rysunek 4.** Rezultat obliczeń dla wodoru ( $\theta = 1$ )

**Figure 4.** Calculation result for hydrogen ( $\theta = 1$ )



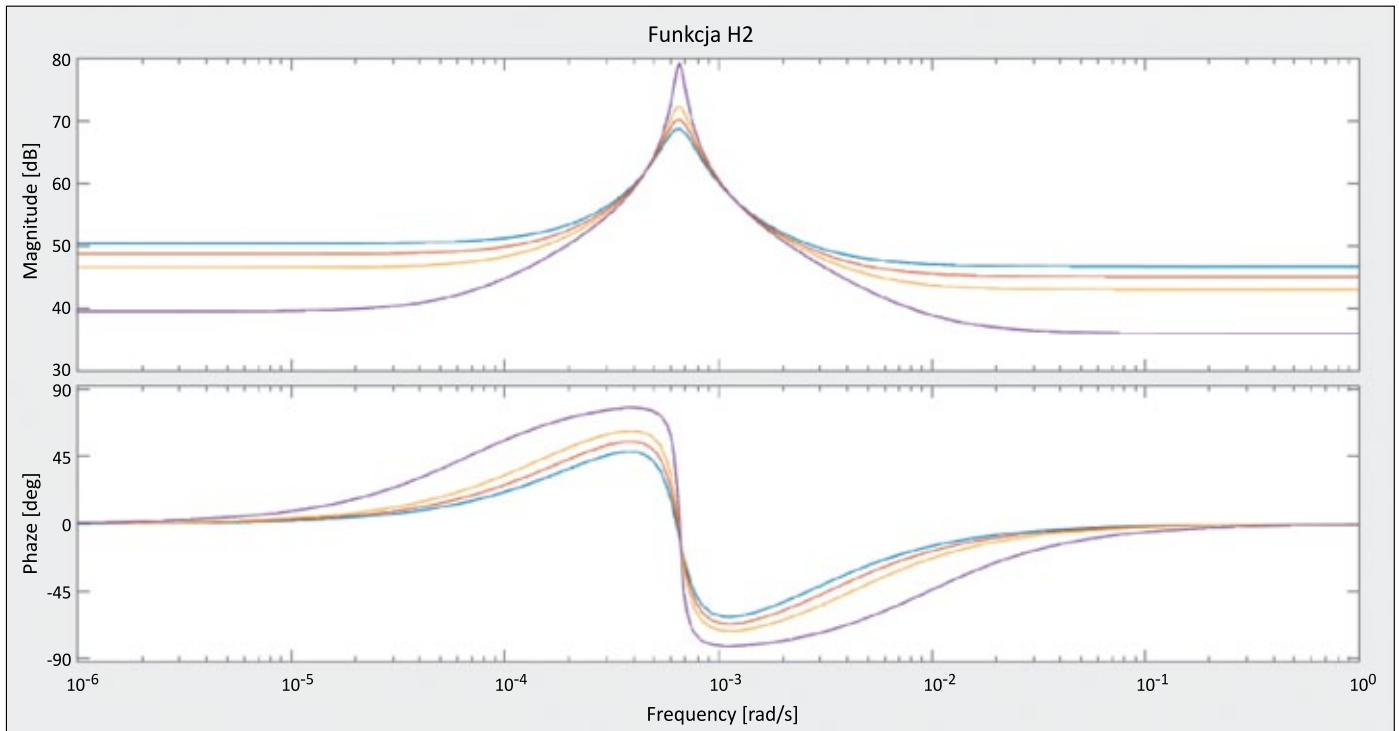
**Rysunek 5.** Rezultat obliczeń dla funkcji H1

**Figure 5.** Result of calculations for function H1

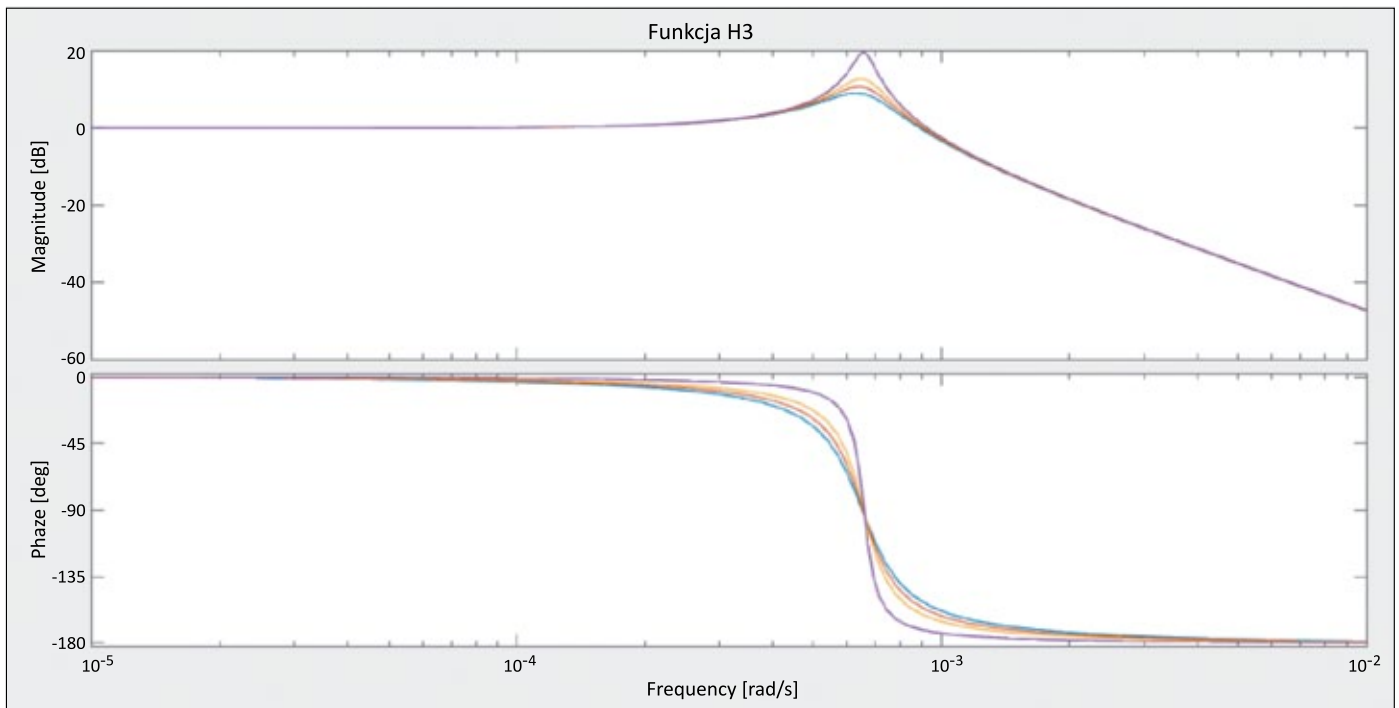
### Wnioski

Uzyskane wyniki jednoznacznie wskazują, że zwiększenie stosunku masowego wodoru  $\theta$  prowadzi do zmian w rezultatach obliczeń. Piki na charakterystyce Bodego zwiększają

się wraz z dodatkiem wodoru do mieszaniny gazów, co może sugerować, że dodatek wodoru wpływa na częstotliwości rezonansowe systemu. Wpływ ten może być związany z różnicami w charakterystyce dynamicznej układu w obecności wodoru.



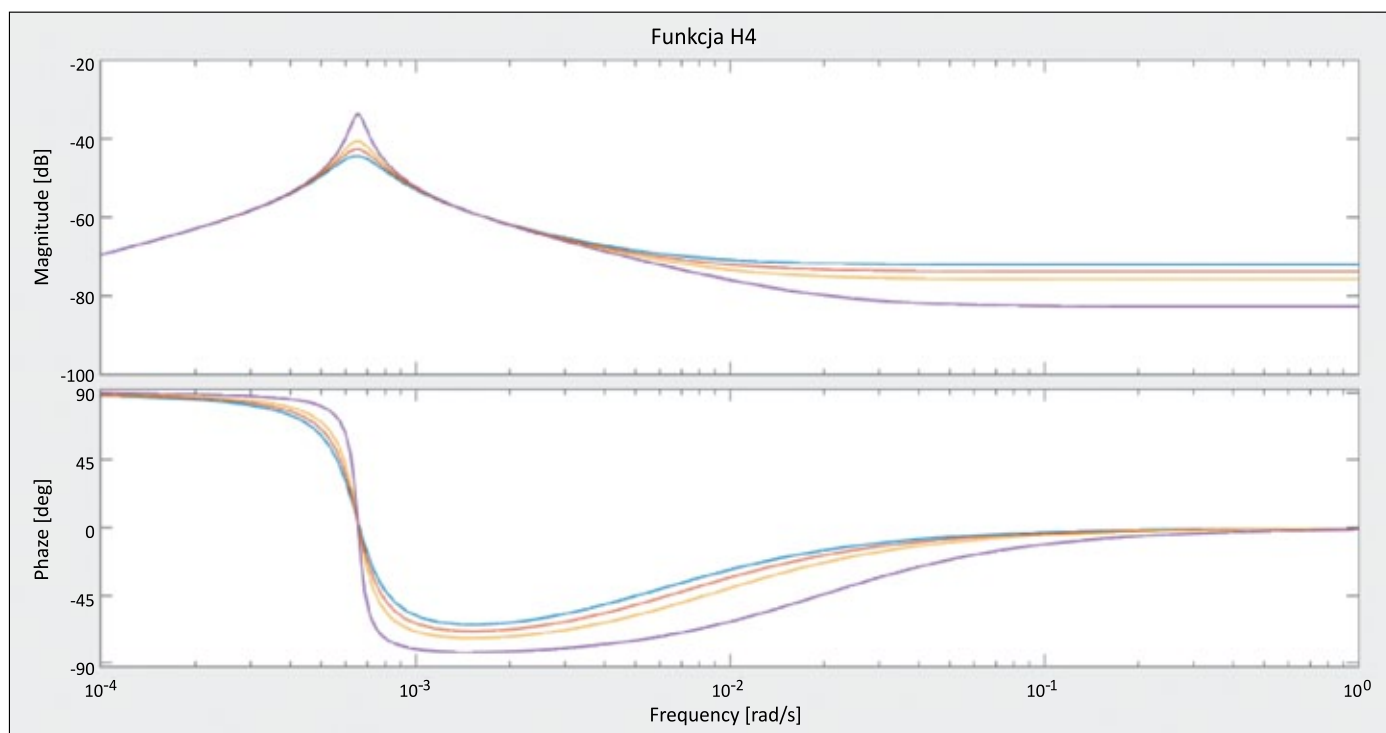
**Rysunek 6.** Rezultat obliczeń dla funkcji H2  
**Figure 6.** Result of calculations for function H2



**Rysunek 7.** Rezultat obliczeń dla funkcji H3  
**Figure 7.** Result of calculations for function H3

W praktyce zwiększające się piki mogą sygnalizować, że układ reaguje na konkretne częstotliwości związane z obecnością wodoru. To może mieć wpływ na stabilność systemu lub jego właściwości dynamiczne i ewentualne dostosowanie parametrów, aby utrzymać stabilność i efektywność systemu.

Jest to ważne spostrzeżenie, ponieważ wskazuje na istnienie zależności między ilością wodoru a ciśnieniem w badanej mieszance gazów. W związku z tym uzyskane wyniki stanowią istotny wkład w zrozumienie wpływu stosunku masowego wodoru na działanie układu.



**Rysunek 8.** Rezultat obliczeń dla funkcji H4  
**Figure 8.** Result of calculations for function H4

Układ jest bardziej stabilny, gdy jego charakterystyka Bodego wykazuje:

- mniejsze amplitudy w częstotliwościach rezonansowych – oznacza to, że system nie reaguje z nadmierną amplitudą na konkretne częstotliwości, co może prowadzić do niestabilności;
- szybkie zmniejszanie się amplitudy przy wyższych częstotliwościach – w miarę wzrostu częstotliwości amplituda odpowiedzi systemu maleje. To wskazuje na zdolność systemu do tłumienia szybkich zmian sygnałów;
- fazę blisko  $-180$  stopni – przesunięcie fazowe zbliżone do  $-180$  stopni jest zwykle korzystne, zwłaszcza w systemach regulacji, gdzie sygnał sterujący powinien być w fazie z sygnałem wyjściowym;
- brak pików na wykresie amplitudy – nieobecność pików na wykresie Bodego sygnalizuje brak rezonansu, co wpływa na stabilność systemu.

### Podsumowanie

W artykule skoncentrowano się na matematycznym modelu mieszaniny wodoru i gazu ziemnego w kontekście izotermicznego przepływu gazów. Analiza matematyczna obejmuje dodanie wodoru do gazu ziemnego, a wyniki badań pomagają zrozumieć fizyczne i termodynamiczne zachowanie mieszaniny tych gazów.

Artykuł podkreśla znaczenie tego modelu w kontekście ewentualnego wykorzystania wodoru jako składnika sieci gazowej. Pod uwagę wzięto wyzwania związane z integracją wodoru z istniejącą infrastrukturą gazową i analizę konsekwencji tego procesu. W kontekście przyszłościowej zrównoważonej energetyki zastosowanie wodoru w sieci gazowej jest istotnym zagadnieniem.

W rezultacie artykuł ten stanowi wkład w badania nad rozwinięciem i adaptacją infrastruktury gazowej, uwzględniając potencjał wodoru jako czynnika wspierającego cele zrównoważonej energetyki.

### Literatura

- Agai B.G., Magaji A.S., Ndayawo M.S., Mundi B.I., 2020. The effect of hydrogen on transient flow of hydrogen natural gas mixture. *Science World Journal*, 15(4): 41–47.
- Director S.W., Rohrer R.A., 1976. Podstawy teorii układów elektrycznych. *PWN, Warszawa*.
- Eames I., Austin M., Wojcik A., 2022. Injection of gaseous hydrogen into a natural gas pipeline. *International Journal of Hydrogen Energy*, 47(61): 25745–25754. DOI: 10.1016/j.ijhydene.2022.05.300.
- Gburzyńska M., 2023. Wytwarzanie wodoru z gazu ziemnego – analiza technologii wytwarzania. *Gaz, Woda i Technika Sanitarna*, 12. DOI: 10.15199/17.2023.12.3.
- Gburzyńska M., 2024. Możliwości wytwarzania wodoru z gazu ziemnego. *Przegląd Techniczny – Gazeta Inżynierska*, 2.
- Gburzyńska M., Kwaśniewski M., 2023. Wodór – niebiesko-zielona rewolucja. *Gaz, Woda i Technika Sanitarna*, 7–8. DOI: 10.15199/17.2023.7.1.

- Hafsi Z., Ayed L., Elaoud S., 2020. Characteristic mesh grid method for transient analysis of natural gas flow in pipelines networks. *UPB Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering*, 82(2): 119.
- Kontorowicz M.I., 1956. Rachunek operatorowy i stany nieustalone w obwodach elektrycznych. *PWN, Warszawa*.
- Kralik J., Stiegler P., Vostrý Z., Zavorka J., 1984. Modeling the dynamics of flow in gas pipelines. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 14(4): 586–596. DOI: 10.1109/TSMC.1984.6313330.
- Ogata K., 2002. Modern Control Engineering. 4<sup>th</sup> Ed. *Prentice Hall Inc., New Jersey*.
- Osiadacz A.J., 1987. Simulation and Analysis of Gas Pipeline Networks. *Gulf Publishing Company, London, UK*.
- Osiadacz A.J., Gburzyńska M., 2022. Selected Mathematical Models Describing Flow in Gas Pipelines. *Energies*, 15(2): 478. DOI: 10.3390/en15020478.
- Osiowski J., 1981. Zarys rachunku operatorowego. *Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa*.
- Weiman A., 1978. Gas Distribution Network Dynamic Modeling and Simulation with Respect to Network Control and Monitoring. *The Technical University of Munich, Munich, Germany*.



Mgr Marta GBURZYŃSKA  
Asystent w Państwowej Akademii Nauk Stosowanych im. Ignacego Mościckiego w Ciechanowie  
Zakład Inżynierii Środowiska  
ul. Narutowicza 9  
06-400 Ciechanów  
E-mail: [marta.gburzynska@pansim.edu.pl](mailto:marta.gburzynska@pansim.edu.pl)

## OFERTA BADAWCZA ZAKŁADU PRZESYŁANIA I DYSTRYBUCJI GAZU

- badania wyrobów z polietylenu do budowy gazociągów, wodociągów oraz kanalizacji deszczowej i sanitarnej;
- badania systemów rurowych z tworzyw sztucznych do instalacji wody ciepłej i zimnej;
- badania armatury metalowej do sieci i instalacji gazowych oraz wodociągowych;
- badania armatury sanitarnej oraz do instalacji centralnego ogrzewania i solarnych;
- badania powłok ochronnych z tworzyw sztucznych na rurach i armaturze stalowej;
- ocena stopnia zagrożenia korozyjnego gazociągów stalowych;
- ocena stanu technicznego izolacji gazociągów stalowych metodami bezwykopowymi;
- badania nowych materiałów z tworzyw sztucznych do budowy gazociągów;
- badania systemów z PE pod kątem możliwości ich stosowania do przesyłania mieszaniny gazu ziemnego i wodoru;
- specjalistyczne szkolenia – szkolenie i kwalifikacja personelu zgrzewającego rury i kształtki z PE wg PN-EN 13067 w INiG-PIB jako Ośrodku Szkoleniowym i Egzaminacyjnym uznanym przez UDT-CERT.



Kierownik: mgr inż. Piotr Szewczyk    Adres: ul. Bagrowa 1, 30-733 Kraków  
Telefon: 12 617 74 42    Faks: 12 653 16 65    E-mail: [piotr.szewczyk@inieg.pl](mailto:piotr.szewczyk@inieg.pl)

 **INSTYTUT NAFTY I GAZU**  
– Państwowy Instytut Badawczy